Algèbre 3 : Deuxième Chapitre

ℌ.ℭ. 𝔖.ℨ.

24 décembre 2020

Table des matières

1 Introduction

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires.
Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.0.1 *1. Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.*

2. *Elle est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.*
3. *Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.*
4. *Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté a_{ij}.*

Exemple 1.0.1 *$n = 2$, $p = 3$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 2, \quad a_{23} = 5$

Définition 1.0.2 *1. Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.*

2. *L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$ Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés matrices réelles.*

1.1 Matrices particulières

Exemples avec n = 3

1. **Matrice unité**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parfois notée I_n, n est la dimension de la matrice (soit I_3 dans cet exemple)

2. **Matrice diagonale**

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}$$

notée $diag(D_{ii})$

3. **Matrice triangulaire inférieure (Lower triangular matrix, L)**

$$D = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$$

4. **Matrice triangulaire supérieure (Upper triangular matrix, U)**

$$D = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

5. Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne ou vecteur ligne. On la note
$$A = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1p}).$$
6. De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne ou vecteur colonne. On la note
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
7. Une matrice carrée A est dite symétrique si : $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i différent de j

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de matrices

Définition 2.1.1 *Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients.

Exemple 2.1.1 *Si*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$A + B = \begin{pmatrix} 3+0 & -2+5=3 \\ 1+2=3 & 7-1=6 \end{pmatrix}$$
Par contre si par exemple
$$B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Alors $A + B$ n'est pas définie.

2.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 2.2.1 *Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{np}(\mathbb{K})$ par un scalaire α est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée αA.*

Exemple 2.2.1 *Si*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$
et $\alpha = -3$. Alors
$$\alpha A = -3A = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -6 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$
La matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée -A. La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Mini-exercices.

1. Soient
$$A=\begin{pmatrix}-7&2\\0&-1\\1&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}21&-6\\0&3\\-3&12\end{pmatrix},$$
$$D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&2\\-3&0\\-8&6\end{pmatrix}.$$
2. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A+2C$ et $5B-4D$. Trouver α tel que $A-\alpha C$ soit la matrice nulle.
3. Montrer que si $A+B=A$, alors B est la matrice nulle.
4. Que vaut $0.A$? et $1.A$? Justifier l'affirmation : $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

2.3 Produit de matrices

Définition 2.3.1 ***Définition du produit*** *Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Définition 2.3.2 ***Produit de deux matrices*** *Soient $A=(a_{ij})$ une matrice $n\times p$ et $B=(b_{ij})$ une matrice $p\times q$. Alors le produit $C=AB$ est une matrice $n\times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :*
$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :
$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} & & b_{1j} & \\ & & \times & \\ & & \times & \\ & & \times & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ a_{i1}\times & \times & \times & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \times & \\ & & \times & \\ \times & \times & c_{ij} & \\ & & & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$) que l'on ajoute au produit du troisième ...

Exemple 2.3.1 *1.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A est de taille 2×3, B de taille 3×2 donc AB est de taille 2×2 et on a

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

$$c_{11} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2, \quad c_{12} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 7$$

$$c_{21} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 4 \times 1 = 3, \quad c_{22} = 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 = 11$$

Donc

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

2. $u = (a_1 a_2 \cdots a_n), \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

uv est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Ce nombre s'appelle ***produit scalaire*** *des vecteurs u et v.*

Remarque 2.3.1 *1. Le produit des matrices n'est pas commutatif.*
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA.

2. *$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.*
   Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Calculer AB.
3. *$AB = AC$ n'implique pas $B = C$.*
   Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$
   Calculer AB et AC

3 Inverse d'une matrice

Définition 3.0.1 *Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, soit $I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité ($\forall A \in M_n(\mathbb{K}), AI = IA = A$). On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que*
$$AB = I \quad et \quad BA = I.$$
On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}. Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note : $A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{p facteurs.}$
L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $Gl_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.0.1 *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :*
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Proposition 3.0.2 ***Inverse d'un produit*** *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4 Déterminant d'une matrice

À toute matrice carrée A correspond une valeur appelée déterminant de A, que l'on dénote par $detA$ ou encore $|A|$.

4.1 Calcul du déterminant pour une matrice d'ordre 2

Considérons la matrice A de dimension 2×2 :
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation :

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

.

Exemple 4.1.1 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation $detA = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = (-2).(-1) - 3.7 = -19.$

Avant de ne pouvoir évaluer le déterminant d'une matrice 3×3 (ou toute autre matrice de dimension supérieure), il nous faut d'abord voir quelques concepts qui s'y rattachent.

4.2 Définition d'un mineur

Le mineur M_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i^{me} ligne et la j^{me} colonne de la matrice.

Exemple 4.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1^{re} ligne et la 2^{me} colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant 2^{me} ligne et la 2^{me} colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = -9$$

4.3 Définition d'un cofacteur

Le cofacteur, C_{ij} d'une matrice A est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Considérons à nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà montré que le mineur $M_{12} = -9$. Ainsi, le cofacteur correspondant, $C_{12} = (-1)^{1+2}M^{12} = (-1)(-9) = 9$. Il s'avère que le mineur, M_{12}, et le cofacteur, C_{12}, sont de signes différents. Le mineur $M_{22} = -26$. Son cofacteur correspondant, C_{22}, est $C_{22} = (-1)^{2+2}M^{22} = 1.(-26) = -26$ Cette fois, le mineur M_{22} et le cofacteur C_{22}, sont identiques.

4.4 méthode de calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

1. Choisir une ligne ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros).
2. Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij} correspondant.
3. Faire la somme de ces résultats.

4.5 Calcul du déterminant pour une matrice d'ordre 3

Pour une matrice 3×3, cela voudrait dire qu'en choisissant de faire une expansion le long de la première ligne, le déterminant serait

$$detA = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion le long de la deuxième colonne, alors il faudrait calculer

$$detA = a_1C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Quoique le choix de ligne ou de colonne puisse différer, le résultat du déterminant sera le même quel que soit ce choix.

Exemple 4.5.1 *Quel est le déterminant de la matrice A ?*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution.
Expansion par cofacteurs :

1. *Choisir une ligne ou une colonne de A. Choisissons par exemple la première ligne.*
2. *Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants. Les éléments de la première ligne sont : $a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{13} = 3$. et les cofacteurs correspondants sont :*

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{11} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. *Finalement, il s'agit de faire le calcul*

$$detA = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 2.0 + 1.6 + 3.0 = 6$$

Notez que le choix de la deuxième colonne est plus efficace puisqu'on a deux zéros dans cette colonne

$$detA = a_{12}C_{12} + 0C_{22} + 0C_{32} = 1.6 = 6$$

4.6 Méthode alternative pour calculer les déterminants

1. Octroyer à chacun des éléments un signe $+/-$ en suivant la règle suivante : on associe un signe positif à la position a_{11}, puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.
2. Choisir une ligne ou une colonne de A si possible, il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros).
3. Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisie par son mineur correspondant, i.e. le déterminant qu'il reste lorsqu'on élimine la ligne et la colonne dans lesquelles se trouve a_{ij}.
4. Faire la somme ou la différence de ces résultats selon le signe accordé aux éléments lors de la première étape.

Vérifions que cette méthode produira le même résultat que dans l'exemple précédent :

Exemple 4.6.1 *Soit donc la matrice A à laquelle on octroie un signe $+/-$ selon la règle décrite plus tôt.*

$$A = \begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 2^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix}$$

1. *Choisissons la 3^{me} colonne (ce n'est certes pas le meilleur choix puisque la 2e rangée possède plus d'éléments nuls.)*
2. *Multiplions ensuite chaque élément par son mineur correspondant.*
   Finalement on obtient

$$detA = +3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +(-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3.0 - 2.(-2) + (-2)(-1) = 6$$

Remarque

La valeur de $detA$ ne change pas si on remplace une ligne (colonne) par la somme de cette ligne (colonne) et d'un multiple d'une autre ligne (colonne).

5 Comatrice. Matrice adjointe

Soit une matrice carrée d'ordre n et C_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij}.

Définition 5.0.1 ***Comatrice / Matrice Adjointe*** *On appelle comatrice (ou matrice adjointe) de A, la matrice carrée d'ordre n, notée $com(A)$ (ou $adj(A)$) définie par :*

$$Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_{n-1n} \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

où C_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini à partir du mineur M_{ij} par la relation : $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

Définition 5.0.2 :***Matrice Inverse*** *On appelle matrice inverse de la matrice carrée d'ordre n, la matrice, si elle existe, notée A^{-1} telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, obtenue par la relation suivante :*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(com(A))^t, \quad detA \neq 0.$$

où $(com(A))^t$ est la transposée de la comatrice de A.

Propriété Si A et B sont deux matrices carrées inversibles et de même ordre, alors : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 5.0.1 *1. Calcul de la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.*

On a $detA = 2.1 - (-4).(-3) = -10 \neq 0$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(com(A)^t,$$

On a $deta_{ij} = a_{ij}$, donc $C_{11} = +M_{11} = 1$, $C_{12} = -M_{12} = -(-3) = 3$, $C_{21} = -M_{21} - (-4) = 4$, $C_{22} = +M_{22} = +2$

$com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $(com(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}(com(A))^t$$

2. Calcul de la matrice inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcul du déterminant suivant la première colonne.

On a $detB = [1(1.(-1) - 2.(-4)) - 0(2.(-1) - 3.(-4)) + (-1)(2.2 - 3.1))] = 6 \neq 0$, donc B est inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{detB}(com(B))^t.$$

On a

$$com(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = +M_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 2.(-4) = 7,$$

$$C_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(0.(-1) - 2.(-1)) = -2,$$

$$C_{13} = +M_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.(-4) - 1.(-1) = 1,$$

$$C_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(2.(-1) - 3.(-4)) = -10,$$

$$C_{22} = +M_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 3.(-1) = 2,$$

$$C_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -(1.(-4) - 2.(-1)) = 2,$$

$$C_{31} = +M_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 3.1 = 1,$$
$$C_{32} = -M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(1.2 - 0.3) = -2,$$
$$C_{33} = +M_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 2.0 = 1.$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(com(A))^t = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(com(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-5}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

6 Matrices et applications linéaires

6.1 Rappels sur les applications linéaires

Définition 6.1.1 ***Définition d'une application linéaire*** *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. Dire que f est linéaire signifie que les deux assertions suivantes sont vraies :*

$$\forall (x, y) \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Ces deux assertions peuvent être réunies en une seule :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in K, \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Proposition 6.1.1 *$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 6.1.1 *Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$. (Faire $\lambda = 0$)*

Vocabulaire Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E.
2. Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective.
3. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
4. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{K}$.

Soient E un espace de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base $(e_1, \cdots e_n)$ de E car, d'après la linéarité de f, si $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a $f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$ pour tout x de E.

6.2 Image et noyau

Proposition 6.2.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire et G un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f et noté Imf.*

Démonstration Soit G un sous-espace vectoriel de E. On a

$$f(G) = \{f(x); \quad x \in G\}.$$

C'est un sous-ensemble de F. Il est non vide car $0_E \in G$. En effet, G est un sous-espace vectoriel de E, donc $f(0_E) = 0_F \in f(G)$.
Soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\quad y_1 + y_2 \in f(G)$.

Par définition de $f(G)$, il existe x_1 et x_2, éléments de G tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_1 = f(x_2)$. On a alors

$$y_1 + \lambda y_2 = f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1 + \lambda x_2)$$

par linéarité de f Or $x_1 + \lambda x_2 \in G$ car G est un espace vectoriel donc $y_1 + \lambda y_2 \in f(G)$.

Définition 6.2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de Imf est appelée rang de f et est notée $rg(f)$.*

Proposition 6.2.2 *Soit $f : E \to F$une application linéaire. On pose*

$$Kerf = \{x \in E; \quad f(x) = 0_F\}$$

$Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f.

Démonstration : $Kerf$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de $Kerf$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $x_1 + \lambda x_2 \in Kerf$. On a

$$f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = 0_F. \quad Donc \quad x_1 + \lambda x_2 \in Kerf.$$

6.2.1 Injectivité, surjectivité

Proposition 6.2.3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est surjective si et seulement si $Imf = F$.*

Démonstration : comme $Imf = f(E)$, le résultat est évident.

Proposition 6.2.4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$.*

Démonstration : supposons f injective. Soit $x \in Kerf$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$ donc $x = 0_E$ par définition de l'injectivité. On a donc $Kerf = \{0_E\}$. Réciproquement, supposons que $Kerf = \{0_E\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f, on en déduit que $f(x - y) = 0_F$ donc $x - y \in Kerf$. Or $Kerf = \{0_E\}$, d'où $x = y$ et f est injective.

6.2.2 Théorème du rang

Théorème 6.2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a*

$$dimE = rgf + dim(Kerf)$$

Corollaire 6.2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective.*

Démonstration : Si f est bijective, alors elle est injective, on a alors $Kerf = \{0_E\}$ et, d'après le théorème du rang, $dimE = rgf = dimImf$. Comme $Imf \subset F$ et que $dimE = dimF$, on en déduit que $Imf = F$ et f est surjective.
De même, si f est surjective, alors $dimE = rgf$ donc $dim(Kerf) = 0$ et $Kerf = \{0_E\}$, ce qui veut dire que f est injective. Comme on l'a supposé surjective, on a montré qu'elle est bijective.

Corollaire 6.2.2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On les équivalences suivantes :*

$$f \text{est bijective} \Leftrightarrow Kerf = \{0\} \Leftrightarrow Imf = E.$$

7 Matrices associées aux applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie n et p respectivement.

Définition 7.0.1 *On appelle matrice de f dans les bases $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E et $B' = \{e'_1, \cdots, e'_p\}$ de F, la matrice, notée $Mat_{B,B'}(f)$ ou $M(f,B,B')$, appartenant à $M_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ dans la base B'.*
Posons $f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{pj}e'_p$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. La matrice de f dans les bases B de E et B' de F est alors la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ Mat_{B;B'}(f) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1j} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2j} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pj} & \cdots\cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{array} \end{array}$$

coordonnées de $f(e_j)$ dans B'.

Si $E = F$ et si $B = B'$, la matrice est notée $Mat_B(f)$

Exemple 7.0.1 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

Soient $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Quelle est la matrice de f dans les bases B et B' ?

1. *On a $f(e_1) = f((1,0,0)) = (1,1) = e'_1 + e'_2$, la première colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*
2. *De même $f(e_2) = f((0,1,0)) = (1,-2) = e'_1 - 2e'_2$, la deuxième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$*
3. *Enfin $f(e_3) = f((0,0,1)) = (-1,3) = -e'_1 + 3e'_2$, la troisième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Ainsi :*

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On montre facilement que $\beta = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\beta' = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (Exercice) Quelle est la matrice de f dans les bases β et β' ?

1. *$f(\epsilon_1) = f((1,1,0)) = (2,-1) = 3\Phi_1 - \Phi_2$. La première colonne de la matrice $Mat_{\beta,\beta'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$*
2. *$f(\epsilon_2) = f((1,0,1)) = (0,4) = -4\Phi_1 + 4\Phi_2$. La deuxième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$*
3. *$f(\epsilon_3) = f((0,1,1)) = (0,1) = -\Phi_1 + \Phi_2$. La troisième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ainsi :*

$$Mat_{\beta,\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases

7.1 Écriture matricielle d'une application linéaire

Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On a

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e'_i.$$

Si on représente le vecteur x dans la base (e_i) par une matrice-colonne X et le vecteur y dans la base (e'_i) par une matrice-colonne Y , on a alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1j} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2j} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pj} & \cdots\cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 7.1.1 *Soit* $\mathbb{R}_2[X] = \{P = aX^2 + bX + c : a, b, c \in \mathbb{R} \quad et \quad degP \leq 2\}$ *et* $B = \{1, X, X^2\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ *l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est* A.
But : déterminer pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X], f(P)$. *On sait*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

Donc $f(1) = 1 + X, \quad f(X) = X + X^2 et \quad f(X^2) = X$.
D'où par linéarité de f, *si* $P(X) = aX^2 + bX + c$,

$$f(P) = af(X^2) + bf(X) + cf(1) = aX + b(X + X^2) + c(1 + X) = bX^2 + (a + b + c)X + c.$$

Finalement :

$$\begin{array}{rl} f : R_2[X] \to & R_2[X] \\ aX^2 + bX + c \mapsto & bX^2 + (a + b + c)X + c \end{array}$$

Définition 7.1.1 *Soit* $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ *: on appelle application linéaire canoniquement associée à* A *l'application :* $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ *définie par* A *dans les bases canoniques.*

Exemple 7.1.2 *L'application linéaire canoniquement associée à*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A est l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $f((1,0)) = (1,2,0)$ et $f((0,1)) = (0,1,-1)$.
On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x, 2x+y, -y)$.
En effet pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+y \\ -y \end{pmatrix}$

Proposition 7.1.1 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} M : \mathcal{L}(E,F) \to & & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat_{B,B'}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On a donc, pour toutes les applications linéaires f et g de E dans F et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$M(f+g) = M(f) + M(g), \quad M(\lambda f) = \lambda M(f)$$

et M est bijective.

Proposition 7.1.2 $dim(\mathcal{L}(E,F)) = dimE \times dimF$

Démonstration : deux espaces isomorphes ont même dimension, d'où le résultat.

Proposition 7.1.3 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, Soient $B_1 = \{e_1, \cdots, e_n\}, \quad B_2 = \{f_1, \cdots, f_p\}, \quad B_3 = \{g_1, \cdots, g_q\}$ des bases de E, F et G respectivement. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, on a*

$$Mat_{B_1 B_3}(g \circ f) = Mat_{B_2 B_3}(g) Mat_{B_1 B_2}(f)$$

Proposition 7.1.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n sur $\mathbb{K}$, soient $\{e_1, \cdots, e_n\}, \quad \{f_1, \cdots, f_n\}$ des bases de E et F respectivement.*
Une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $Mat_{e_i,f_j}(f)$ est inversible, de plus

$$Mat_{f_j,e_i}(f^{-1}) = \left(Mat_{e_i,f_j}(f)\right)^{-1}$$

7.2 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soient $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ deux bases de E.

Définition 7.2.1 *On appelle matrice de passage de la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ à la base $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ la matrice, notée $P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs e'_i dans la base $\{e_i\}$.*
La matrice $P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}$ est la matrice de l'endomorphisme Id_E dans les bases $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$.

On a donc

Proposition 7.2.1 *La matrice de passage $P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\{e'_i\} \to \{e_i\}}$.*

Soit $x \in E$ de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\{e_i\}$ et de composantes $(x'_1, \cdots, x'_n)$ dans la base $\{e'_i\}$. On note P la matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e'_i\}$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Proposition 7.2.2

$$X' = P^{-1}X$$

Exemple 7.2.1 *Soit $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, Soit $B' = \{e'_1 = (-2,3), e_2 = (0,-1/2)\}$*

1. *Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer la matrice de passage $P_{B \to B'}$ qui est $M(id, B', B)$*
3. *Déterminer les composantes de $x = (6,-3)$ dans la base B'*

Preuve

On a card$(B) = 2 = dim\mathbb{R}^2$, pour montrer que B est une base de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que B' est libre c.a.d. det $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1/2 \end{pmatrix} = (-2)(-1/2) = 1 \neq 0$.

On a

$$P = M(id, B', B) =$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} id(e'_1) & id(e'_1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1/2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

on calcul P^{-1} et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Enfin, on a $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$, donc les coordonnées de x dans la base B' sont $(-3,-12)$ c.a.d. $x = -3e'_1 - 12e'_2$

7.3 Changement de base sur la représentation matricielle

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *et* $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ deux bases de E, $\beta = \{f_1, \cdots, f_n\}$ *et* $\beta' = \{f'_1, \cdots, f'_n\}$ deux bases de F. On note $A = Mat_{B,\beta}(f)$, $A' = Mat_{B',\beta'}(f)$, $P = P_{B \to B'}$ *et* $Q = P_{\beta \to \beta'}$

Proposition 7.3.1

$$A' = Q^{-1}AP$$

Corollaire 7.3.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ deux bases de E. Notons*

$$A = Mat_{B,B}(f) = Mat_B(f), \quad A' = Mat_{B',B'}(f) = Mat_{B'}(f) \quad et \quad P = P_{B \to B'}$$

On a alors

$$A' = P^{-1}AP$$

Définition 7.3.1 *Deux matrices A et A' sont dites semblables s'il existe une matrice P de $M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.*
Deux matrices semblables représentent donc le même endomorphisme dans deux bases différentes.

7.4 Rang d'une matrice

Soit $F = \{v_1, v_2, \cdots v_p\}$ une famille finie de vecteurs. On appelle rang de la famille $\{v_i\}$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. Autrement dit

$$rg(v_1, \cdots, v_p) = dimVect(v_1, \cdots, v_p)$$

Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille formée par les vecteurs colonnes de A.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $\beta = \{f_1, \cdots, f_n\}$ deux bases quelconques de E et F respectivement et $A = M(f, B, \beta)$.

Proposition 7.4.1

$$rgf = rgA$$

Proposition 7.4.2 *Deux matrices qui représentent la même application linéaire dans des bases différentes ont même rang, en particulier, deux matrices semblables ont même rang.*

Remarque 7.4.1 *Pour toute matrice A, on a $rgA = rg({}^tA)$. Il s'ensuit que le rang d'une matrice est aussi égal au rang de la famille des vecteurs lignes.*

Propriétés.

1. Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$. On a : $rg(A) \leq min(n, p)$
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :
   — $rg(A) \leq n$
   — $rg(A) = n$ si et seulement si les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}$
   — $rg(A) = n$ si et seulement si A est inversible.

7.5 Matrices extraite

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle matrice extraite de A, toute matrice de la forme $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ avec $I \subset \{1, \cdots, n\}$ et $J \subset \{1, \cdots, p\}$.

7.6 Rang et Matrices extraite

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $r = rg(A)$.
— Si M est une matrice extraite de A, alors $rg(M) \leq r$
— Il existe une matrice $r \times r$ inversible extraite de A.
En conclusion le rang de A est la taille maximale des matrice inversibles extraites de A.

Exemple 7.6.1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $detA = det\{c_1, c_2, c_3\} = 1.(-1).5 \neq 0$*, donc* $rg(A) = dimVect(c_1, c_2, c_3) = 3$.

Exemple 7.6.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $rg(A) \leq min(3, 4) = 3$*, toute matrice extraite de* A *de type* 3×3 *est de la forme :*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

seulement $detA' = 0$ *donc* $rg(A) < 3$*. Il n'existe pas de matrice de de type* 2×2 *de determinant différent de zero donc* $rg(A) < 2$*. Donc* $rg(A) = 1$

7.7 Trace d'un endomorphisme

On se place sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n

Définition 7.7.1 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n*. On appelle trace de* A *et on note* $tr(A)$*, la somme des coefficients diagonaux de* A*.*
On vérifie que l'application trace ainsi définie est linéaire et que $tr(A^t) = tr(A)$*.*

Lemme 7.7.1 *Pour toutes les matrices* A *et* B *carrées d'ordre* n*, on a* $tr(AB) = tr(BA)$

Soient $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ Notons $A = Mat_B(u), \quad A' = Mat_{B'}(u) \quad et \quad P = P_{B \to B'}$. On a alors $A' = P^{-1}AP$, donc

$$tr(A') = tr((P^{-1}A)P) = tr(P(P^{-1}A)) = tr(A).$$

Ceci justifie la définition suivante :

Définition 7.7.2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On définit la trace de* u*, notée* $tr(u)$*, comme étant la trace de la matrice représentative de* u *dans une base quelconque de* E*.*