

Corrigé type "Examen final d'Algèbre 3"

Exercice 1 Questions de cours

1. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est le polynôme P_A défini par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. Deux matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

3. Un polynôme P est dit annulateur de la matrice A si et seulement si $P(A) = 0$.

Exercice 2 (INTERROGATION)

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, z, -y) \end{aligned}$$

une application linéaire.

1. Montrons que la matrice associée à f dans la base canonique est la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que la base canonique de \mathbb{R}^3 est $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Remarquons que :

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3.$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 0, -1) = 0e_1 + 0e_2 - 1e_3.$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3.$$

Donc $\text{Mat}_B(f) = A$

2. Calculons A^2 , A^3 .

$$\text{On a } A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculons $A^3 - A^2 + A - I$.

$$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et déduire que A est inversible.

On a $A^3 - A^2 + A - I = 0$ donc $A^3 - A^2 + A = I$

Alors $A(A^2 - A + I) = I$ et $(A^2 - A + I)A = I$

Donc A est inversible son inverse est $A^2 - A + I$

4. Calculons A^{-1} par deux méthodes :

$$\text{Méthode 1 : } A^{-1} = A^2 - A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Méthode 2 : } A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com}A)^T.$$

On a $\det A = 1$ et $\text{Com}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(\text{Com}A)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons $\det(A - \lambda I)$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3-\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(3-\lambda)(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= -(3-\lambda)(1+\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1+\lambda)^3 \end{aligned}$$

Donc $P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+1)^3$.

2. Montrons que A est diagonalisable : Les valeurs propres de A sont -1 valeur multiple d'ordre 3 et 3 valeur simple Étudions les espaces propres associés aux valeurs propres

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; A(x, y, z, t)^T = -(x, y, z, t)^T\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = -y - z - t\} \\ &= \text{Vect}\{(-1, 1, 0, 0); (-1, 0, 1, 0); (-1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Une base de E_{-1} est $\{(-1, 1, 0, 0); (-1, 0, 1, 0); (-1, 0, 0, 1)\}$. Donc $\dim E_{-1} = 3$.

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; A(x, y, z, t)^T = 3(x, y, z, t)^T\}. \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 3x + y + z + t = 0, x + 3y + z + t = 0, x + y + 3z + t = 0, x + y + z + 3t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Une base de E_3 est $\{(1, 1, 1, 1)\}$.

Donc l'ensemble des vecteurs propres $\{(-1, 1, 0, 0); (-1, 0, 1, 0); (-1, 0, 0, 1); (1, 1, 1, 1)\}$ de A forme une base de \mathbb{R}^4 , et donc la matrice A est diagonalisable.

3. La matrice diagonal D et la matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ sont :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Trouvons une matrice carré $B \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Remarquons d'abord que la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

est telle que $(M)^2 = D$.

En écrivant $A = PDP^{-1} = PM^2P^{-1} = (PMP^{-1})(PMP^{-1})$, et en posant $B = PMP^{-1}$, on obtient $A = B^2$.