Corrigé de la série de TD N^0 2

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *On a* $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + (AB) + (BA)$ *donc* $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2(AB)$ *car* $AB \neq BA$.

Exercice 2 *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exprimer B^2 *en fonction de* B.

$$\text{On a } B = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B\,.$$

1. *En déduire* A^2 *en fonction de* A.
   On a $B = A+3I$ *donc* $A = B-3I$, *les matrices* B *et* $(-3)I$ *commutent c.a.d.*$(-3)IB = B(-3)I = (-3)B$ *donc*
   $$A^2 = (B-3I)^2 = B^2 + 2B(-3I) + (-3I)^2 = 3B - 6B + 9I = 3(3I - B) = -3A$$
2. *La matrice* A *est elle inversible.*
   Supposons que A *est inversible, alors* $AA^{-1} = I$ *donc* $A.A.A^{-1} = AI = A$ *mais* $A^2 = -3A$ *alors* $-3A.A^{-1} = A$ *donc* $-3I = A$ *mais* $A \neq -3A$, *on conclut que la matrice* A *n'est pas inversible.*

Soit A *la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* A^2.
   $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$
2. *En déduire* A^{-1}.
   On a $A^2 = A + 2I \Rightarrow A^2 - A = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}(A^2 - A) = I \Rightarrow \frac{1}{2}A(A-I) = I \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}(A-I)\right) = I$,
   donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$
3. *Retrouver* A^{-1} *par une autre méthode.*
   $$A^{-1} = \frac{1}{detA}(ComA)^t$$
   avec $detA = 2$

Exercice 3 — *On Calcule le déterminant D_1 selon la première colonne*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1)+1-0+0 = 3$$

Méthode 2

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2+l_1 \\ l_3 \end{matrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3$$

— $D_2 = \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 = l_1+l_2 \end{matrix} = 0$

car $l_3 = l_1 + l_2$

— $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$

Exercice 4 1. *Déterminer le rang des matrices suivantes.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

— *On a* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *et* $det(A) = 8 \neq 0$, *donc* $rg(A) = 3$.

— $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$, *donc* $rg(B) \leq min(3,4) = 3$, *de B on peut extraire une sous matrice, par exemple* $B' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *de déterminant égale à* $1 \neq 0$, *donc* $rg(B) = 3$.

— *Pour C, on a* $C_1 = C_3 = -C_2$ *(avec* C_i *désigne la colonne i), donc* $detC = 0$, *toutes les sous matrices extraites de la matrice C de type* 2×2 *sont de determinant nul car les colonnes (même les lignes sont linéairement dépendantes), donc* $rg(C) < 2$ *enfin* $rg(C) = 1$.

— $det(D) = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2(a+1)$
  — *Si* $a \neq 1$ *et* $a \neq -1$, $detD \neq 0$ *donc* $rg(D) = 3$.
  — *Si* $a = -1$ *alors* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $detD = 0$ *donc* $rg(D) < 3$, *on peut extraire une sous matrice* $D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *de D de déterminant* $= -2 \neq 0$, *donc* $rg(D) = 2$.
  — *Si* $a = 1$ *alors* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $detD = 0$ *donc* $rg(D) < 3$, *seulement on ne peut extraire aucune sous matrice* D' *de type* 2×2 *tel que* $detD' \neq 0$ *donc* $rg(D) = 1$.

2. *Déterminer les matrices associées aux applications linéaires f, g et h dans les bases canoniques*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (4x-3y, x+y).$$

Soit $B_{\mathbb{R}} = \{e\}$, *avec* $e = 1$ *base canonique de* $\mathbb{R}$, $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *et* $B' = \{e'_1 = (1,0,0,0), e'_2 = (0,1,0,0), e'_3 = (0,0,1,0), e'_4 = (0,0,0,1)\}$ *les bases canoniques de* $\mathbb{R}^2$ *et de* $\mathbb{R}^4$.
On a

— $f(e_1) = f((1,0)) = (4,1) = 4(1,0) + 1(0,1) = 4e_1 + 1e_2$.
$f(e_2) = f((0,1)) = (-3,1) = -3(1,0) + 1(0,1) = -3e_1 + 1e_2$, *donc*

$$Mat_{B,B}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

—

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 8x-3y$$

$g(e_1) = g((1,0)) = 8.1 - 3.0 = 8.1 = 8e$.
$g(e_2) = g((0,1)) = 8.0 - 3.1 = -3e$, *donc*

$$Mat_{B,B_{\mathbb{R}}}(g) = \begin{array}{c} \begin{matrix} g(e_1) & g(e_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \; e$$

—

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto (x, -3x, 11x, 0).$$

$h(e) = h(1) = (1,-3,11,0) = 1(1,0,0,0) - 3(0,1,0,0) + 11(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1)$
$e'_1 - 3e'_2 + 11e'_3 + 0e'_4$ *donc*

$$Mat_{B_{\mathbb{R}},B'}(h) = \begin{array}{c} h(e) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{matrix}$$

Exercice 5 *Soit* $E = F = \mathbb{R}_2[X] = \left\{P = aX^2 + bX + c / \quad a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$, *on munit* $\mathbb{R}_2[X]$ *de la base canonique* $B = \left\{1, X, X^2\right\}$. *Soit f l'application définie par* $f(P) = P'$.
Déterminer $M_B(f)$, *la matrice de* f *relativement à* B.
On a

$f(1) = 1' = 0 = 0.1 + 0.X + 0.X^2$.
$f(X) = X' = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2$.
$f(X^2) = (X^2)' = 2X = 0.1 + 2.X + 0.X^2$.
donc

$$Mat_B(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

Exercice 6 *Soit* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique* B *de* $\mathbb{R}^4$ *et* B' *de* $\mathbb{R}^3$ *est*

$$A = M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer une base du noyau de f.*

$$Kerf = \{X \in \mathbb{R}^4 / \quad AX = 0\}$$

$$\begin{aligned} AX = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 + 2x + x_3 + 3x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 11x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La résolution du système nous donne $x_2 = x_3, \quad x_1 = -3x_3 \quad et \quad x_4 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} Kerf &= \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \quad x_2 = x_3, \quad x_1 = -3x_3 \quad et \quad x_4 = 0\} \\ &= \{(-3x_3, x_3, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4 / \quad x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(-3, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4 / \quad x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= [a = (-3, 1, 1, 0)] \end{aligned}$$

On a $dimkerf = 1$ donc $dimImf = dim\mathbb{R}^4 - 1 = 3 = dim\mathbb{R}^3$.
On a $Imf \subset \mathbb{R}^3$ et $dimImf = dim\mathbb{R}^3$ donc $Imf = \mathbb{R}^3$.
Comme base de Imf, on peut prendre par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Enfin $rg(A) = rg(f) = dimImf = 3$.

Exercice 7 ***Laissé aux étudiants***

Exercice 8 *Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

   On a $det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, *donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Déterminer la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.*

$$P = Mat_{B',B}(Id) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$$P^{-1} = Mat_{B,B'}(Id) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

3. *Déterminer la matrice A' de u dans la base B'.*
   ***Les coordonnées de** $u(e_1')$ **dans la base** B' :*

$$Ae_1' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1'.$$

   De même on trouve $Ae_2' = e_3'$ et $Ae_3' = -e_2'$. Donc

$$A' = Mat_{B',B'}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1') & u(e_2') & u(e_3') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array}$$

— $P^{-1}AP = A'$.

— $A'^2 = A'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

— $A'^4 = A'^2A'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

— *On a* $A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$ *donc* $A^4 = PA'^4P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ *donc* $A^{4n} = I_3^n = I_3$.