Algèbre 3 **Corrigé type**

Exercice 01$(6pts)$

1. **(F):** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$a toutes ses valeurs propres réelles, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et elle n'est pas diagonalisable, $\dim E_{\lambda=0} = 1 \neq m = 2$.
2. **(V):** $P_A(\lambda) = 0$ avec $A \in M_n(\mathbb{C})$, admet toujours n solutions dans $\mathbb{C}$.
3. **(F):** $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
4. **(V):** A diagonalisable $\Longleftrightarrow \exists P$ inversible $/A = PDP^{-1}$, donc $\exists P$ inversible $/A^2 = PD^2P^{-1}$, donc A^2 diagonalisable.
5. **(V):** Théorème de Cayeley-Hamilton.
6. **(F):** $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$.

Exercice 02 $(6pts = ((1 + 1) + (1.5 + 1.5) + 1)pts)$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda)$.

- On a deux valeurs propres simples et distinctes donc A et B sont diagonalisables.
- $E_{\lambda=1} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 / Av = 1v\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y\right\} = \left\{(-y, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}\right\} = [(-1, 1)]$.

$E_{\lambda=4} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 / Av = 4v\right\} = [(1, 2)]$. Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour la matrice B on trouve:

- $E_{\lambda=1} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 / Bv = 1v\right\} = [(2, 1)]$ et $E_{\lambda=4} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 / Bv = 4v\right\} = [(1, 2)]$. Donc $P' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- On a $A = PDP^{-1}$ et $D = P'^{-1}BP'$, en remplaçant cette dernière égalité dans A, on trouve

$$A = P\left(P'^{-1}BP'\right)P^{-1} = PP'^{-1}BP'P^{-1}$$

Donc $C = PP'^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 03 $(8pts = (1 + 1 + 1.5 + 1.5 + 1 + 1 + 1)pts)$

- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$, le polynôme est scindé donc A est trigonalisable.

- $E_{\lambda=1} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 / Av = 1v\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = -z\right\} = \left\{(x,y,-y) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\right\} = \{x\,(1,0,0) + y\,(0,1,-1) \,/ x, y \in \mathbb{R}\} = [\{v_1 = (1,0,0)\,, v_2 = (0,1,-1)\}]\,.$

- On a: $f(v_1) = Av_1 = v_1,\ f(v_2) = Av_2 = v_2$ et

$$f(v_3) = Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2 + v_3.$$

Donc

$$T = M_f(B') = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \qquad \text{avec} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- On a

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N,$$

avec $N^2 = 0$ (N nilpotente)

-

$$\begin{aligned} T^n &= (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k I_3^{n-k} = C_n^0 N^0 I_3^{n-0} + C_n^1 N^1 I_3^{n-1} + 0 + \ldots + 0 = I_3 + nN\ , \\ (\ N^k &= 0,\ \forall k \geq 2,\ \ C_n^0 = 1 \text{ et } C_n^1 = n\ ). \end{aligned}$$

$$T^n = I_3 + nN\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & n+1 \end{pmatrix}$$