# Devoir N°1 "Algèbre 3"

**Exercice 1** 1. *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Calculer* $A+B$, $AB$, $BA$, $A^2$ *et* $B^2$.

(b) *A-t-on* $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2(A \times B)$ ?

2. *Soients* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A^2$, $B^2$, $AB$ *et* $BA$.

3. *Soients* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A^p$ *et* $B^p$ *pour tout* $p \geq 0$. *Montrer que* $AB = BA$, *Calculer* $(A+B)^p$.

***Exercice 2*** *Calculer les déterminants suivants*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

***Indications :***

- *Pour* $D_2$ *on remarque que* $l_3 = l_1 + l_2$, *donc* $D_2 = 0$.
- *Pour calculer* $D_3$, *on peux choisir la ligne 2 ou la colonne 2 (puisqu'on a 2 zéros), si on choisit la deuxième colonne, on fait des opérations sur les lignes pour avoir un troisième zéro, c.a.d.* $l'_1 = l_1 - 2l_2$.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1-2.0 & 2-2.1 & 3-2.4 & 1-2.0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l'_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

*On obtient 3 zéros dans la deuxième colonne, donc on calcul* $D_3$ *selon la deuxième colonne.*

**Exercice 3** 1. *Soit* $f$ *une application linéaire dont sa matrice dans la base canonique est :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(a) *déterminer la base du noyau de* $f$.

(b) *Quel est le rang de* $A$ ?

2. *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Calculer* $det(M)$ , *en déduire que* $A$ *est inversible et calculer* $M^{-1}$.

(b) *Déterminer* $g$ *l'endomorphisme associé a la matrice* $M$ *par rapport a la base canonique.*

(c) *Est-ce-que* $g$ *est un automorphisme, si oui(justifier) trouver son inverse* $g^{-1}$

*Bon courage*