Examen final

Exercice 1 *Parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, justifier*

1. *Si une matrice a toutes ses valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable.*
2. *Le polynôme caractéristique d'une matrice* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *est scindé.*
3. *La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable. (Considérer* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, *et* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$*)*
4. *Si* A *est diagonalisable, alors* A^2 *est diagonalisable.*
5. *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$, *avec* $dimE = n$ *fini et* P_f *son polynôme caractéristique, alors* $P_f(f) = 0$.
6. *Si* A *et* B *sont deux matrices de* $M_2(\mathbb{R})$, *alors* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 2

1. *Montrer que les matrices*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad et \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

   sont diagonalisables

2. *Trouver deux matrices inversibles* P *et* P' *telles que*

$$A = PDP^{-1} \quad et \quad B = P'DP'^{-1}.$$

3. *Trouver une matrice* C *telle que*

$$A = CBC^{-1}$$

Exercice 3 *Soit* A *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *associé.*

a/ *A est elle trigonalisable ?*

b/ *Déterminer le sous espace propre associé à* $\lambda = 1$.

c/ *Montrer qu'il existe une base* $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *avec* $(v_1 et v_2) \in E_{\lambda=1}$ *et* $v_3 = (0,0,-1)$, *dans laquelle la matrice de* f *est :*

$$T = M_f(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d/ *Déterminer une matrice inversible* P *telle que* $A = PTP^{-1}$.

e/ *Décomposer* T *sous la forme* $T = I_3 + N$ *avec* N *matrice nilpotente.*

f/ *Calculer* T^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

g/ *En déduire* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Bon courage