Examen Final

Exercice 1 1. *Répondre par vrai ou faux ? avec justification*

  (a) *Tout idéal dans l'anneau A est un sous-anneau dans A.*

  (b) *Toute matrice trigonalisable est diagonalisable.*

2. *Donner la définition de la valeur propre d'une matrice carrée A.*
3. *Trouver les couples (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ tels que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admette le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *pour vecteur propre.*

Exercice 2 *Soit* $E = \mathbb{R}_4[X] = \left\{P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e / \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\right\}$, *on munit* $\mathbb{R}_4[X]$ *de la base canonique* $B = \left\{1, X, X^2, X^3, X^4\right\}$. *Soit f l'application définie de E vers E par* $f(P) = X(X-1)P' - 4XP$.
Déterminer $M_B(f)$, la matrice de f relativement à B.

Exercice 3 1. *On considère la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
- *Montrer que A est diagonalisable.*
- *Trouver une matrice inversible P, et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.*
- *Calculer A^n.*

2. *Soit (U_n) une suite réelle définie par :*

$$U_{n+3} = -3U_{n+2} + U_{n+1} + 3U_n \text{ ; avec } U_0 = 1, U_1 = 0, U_2 = -1.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix}$

- *Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.*
- *En déduire U_n en fonction de n.*