

Examen final d'Algèbre 3

Exercice 1 Questions de cours (3pts)

1. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée A .
2. Quand dit-on que deux matrices sont semblable.
3. Qu'est ce qu'un polynôme annulateur d'une matrice.

Exercice 2 (INTERROGATION) (9pts)

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, z, -y) \end{aligned}$$

une application linéaire.

1. Montrer que la matrice associée à f dans la base canonique est la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer A^2 , A^3 .
3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$ et déduire que A est inversible.
4. Calculer A^{-1} par deux méthodes.

Exercice 3 (8pts)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)^3$.
2. Montrer que A est diagonalisable.
3. Trouver une matrice diagonal D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Trouver une matrice carré $B \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.