Examen final d'Algèbre 4

Exercice 1 *(6pts)*

(a) *Répondre par vraie ou faux et justifier la réponse*

1 *Dans* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de la base canonique le sous-espace vectorielle* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$ *est un hyperplan.*

2 *Dans un espace vectoriel de dimension 7, l'hyperplan est de dimension 5.*

(b) *Donner la définition de :*

1 *L'espace dual* E^* *d'un espace vectoriel* E*.*

2 *Le supplémentaire d'un sous espace vectoriel* F *dans un espace vectoriel* E*.*

3 *Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique* ϕ *sur l'espace vectoriel* E*.*

Exercice 2 *Interrogation(6pts)*

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 sur le corps* $\mathbb{R}$*. Soit* $B_0^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ *la base duale de la base canonique* $B_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$*. On note par* u *et* v *les éléments de* E^* *définis par*

$$u(P) = P(1), \quad v(P) = \int_0^1 P(t)dt$$

1. *Montrer que* $B^* = \{e_3^*, u, v\}$ *est une base de* E^**.*
2. *Donner la matrice de passage* $M_{B_0^*}B^*$ *de* B_0^* *à* B^**.*
3. *Montrer que la base pré-duale de* B^* *est* $B = \left\{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}X + X^2, \quad -1 + 2X, \quad 2 - 2X\right\}$*.*

Exercice 3 *(8pts)*

Soit E *l'espace vectoriel réel* $\mathbb{R}^2$ *muni de la base canonique* $\{e_1, e_2\}$ *et* f *l'application définie sur* E *telle que pour tout élément* (x,y) *de* $E \times E$*, avec* $x = (x_1, x_2)$*,* $y = (y_1, y_2)$

$$f(x,y) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2.$$

1. *Montrer que* f *est une forme bilinéaire symétrique.*
2. *Ecrire la matrice de* f *par rapport à la base canonique* $\{e_1, e_2\}$*.*
3. *Montrer que les vecteurs* $v_1 = e_1 + 2e_2$*,* $v_2 = 2e_1 + 5e_2$ *forment une base de* E*.*
4. *Ecrire la matrice de* f *par rapport à la base* $\{v_1, v_2\}$ *de* E*.*
5. *Donner l'expression de la forme quadratique* q*, associée à* f *par rapport à la base canonique.*