Réduction des endomorphismes

$\mathfrak{H}.\mathfrak{C}$ $\mathfrak{S}.\mathfrak{Z}$

30 janvier 2021

1 Qu'est-ce que réduire un endomorphisme ?

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. Si on se place dans une base de E, on peut représenter f par une matrice. Le but de ce chapitre est de trouver une base de E telle que la matrice représentant f dans cette base soit la plus "simple" possible.

2 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in M_n(K)$.

— On dit que f est diagonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est diagonale c.a.d.

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— On dit que A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale c.a.d. $\exists$ une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que $D = P^{-1}AP$.

— On dit que f est triangularisable (ou trigonalisable), s'il existe une base B de E telle que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad ou \quad M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3 Vecteurs propres - Valeurs propres - Sous espaces propres

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Un scalaire λ est appelé valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que :*

$$f(x) = \lambda x.$$

On dit alors que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Définition 3.1.2 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f de E s'appelle le spectre de f et on le note $Sp(f)$.*

Exemple 3.1.1 *Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Considérons $f = \frac{d}{dx}$, l'endomorphisme de dérivation sur E, soit*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ u & \mapsto & u' \end{array}.$$

Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $u(x) = e^{\lambda x}$. On a bien $u \in E$, $u \neq 0$ et

$$f(u) = u' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda u.$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de f et que la fonction $u : x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à λ. Ainsi, tout nombre réel est une valeur propre de f. D'où :

$$Sp(f) = \mathbb{R}.$$

Le spectre de f est donc infini.

On définit de façon similaire les valeurs propres et le spectre d'une matrice carrée. On a la

Définition 3.1.3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :*

$$Ax = \lambda x.$$

On dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A s'appelle le spectre de A et on le note $Sp(A)$.

Exemple 3.1.2 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad et \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

On a bien
$x \neq 0 \quad et \quad Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5x$

Ceci montre que $\lambda = 5$ est une valeur propre de A et que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

Définition 3.1.4 ***sous-espace propre d'un endomorphisme***
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in Sp(u)$. Alors $E_\lambda = ker(f - \lambda Id_E)$ est appelé sous–espace propre de E associé à λ. C'est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à λ.

3.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, il existe un moyen très pratique pour déterminer toutes les valeurs propres d'un endomorphisme donné de E. On a la

Proposition 3.2.1 *On suppose que E est de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de f si et seulement si :*

$$det(f - \lambda Id_E) = 0.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{array}{lll} \lambda \quad \text{est une valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\} : \quad f(x) = \lambda x \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\} : \quad (f - \lambda Id_E)(x) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & (f - \lambda Id_E) \quad \textit{est non injective} \\ & \Leftrightarrow & det(f - \lambda Id_E) = 0 \end{array}$$

Remarque 3.2.1 *Le développement du déterminant $det(f - \lambda Id_E)$ donne un polynôme en λ de degré $n = dimE$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Définition 3.2.1 *Supposons que E est de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. L'expression $det(f - \lambda Id_E)$ s'appelle le polynôme caractéristique de f et on la note $P_f(\lambda)$.*

En adjoignant la proposition (3.2.1) et la remarque qui la suit à la définition (3.2.1), on aboutit au corollaire immédiat suivant :

Corollaire 3.2.1 *On suppose que E est de dimension finie n. Alors les valeurs propres d'un endomorphisme f de E sont les racines de son polynôme caractéristique P_f.*
De plus, tout endomorphisme de E possède au maximum n valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Les analogues de la définition (3.2.1) et du corollaire (3.2.1) pour les matrices s'énoncent de la façon évidente que voici :

Définition 3.2.2 *. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'expression $det(A - \lambda I_n)$ s'appelle le polynôme caractéristique de A et on la note $P_A(\lambda)$.*

Corollaire 3.2.2 *Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines de son polynôme caractéristique P_A.*
De plus, toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède au maximum n valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

3.2.1 Expression du polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A).$$

Exemple 3.2.1 *On reprend la matrice déjà vue dans l'exemple d'avant, soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Cherchons toutes les valeurs propres réelles de A : Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = \lambda^2 - tr(A)\lambda + (-1)^2 det(A),$$

avec $tr(A) = -2 + 1 = 3$ et $det(A) = 2.1 - 3.4 = -10$.
Les racines de P_A sont $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -2$, donc les valeurs propres de A sont donc 5 et -2.

Définition 3.2.3 ***Matrices semblables*** *On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P de $M_n \in (\mathbb{R})$ inversible telle que*

$$B = P^{-1}AP$$

Définition 3.2.4 *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et même spectre.*

4 Diagonalisation

4.1 Définitions et exemples

Définition 4.1.1 *Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base B de E telle que la matrice associée à f relativement à B soit diagonale, c'est-à-dire de la forme*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

Définition 4.1.2 *On dit qu'une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, autrement dit s'il existe P inversible tel que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.*
Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

Théorème 4.1.1 *Une matrice A d'ordre n est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de R^n constituée de vecteurs propres de A. Une telle base est appelée* ***base de vecteurs propres.***

5 Espaces propres et caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Définition 5.0.1 ***Polynôme scindé.***
Un polynôme ***scindé*** *est un polynôme qui peut se factoriser en produit d'expressions du premier degré.*

— $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)(X + 1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$,
— $X^2 + X + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
En particulier, sur $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

5.1 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisibilité

Théorème 5.1.1 ***Condition nécessaire et suffisante***

$$\boldsymbol{f \quad ou \quad A \text{ est diagonalisable}} \Leftrightarrow \begin{cases} P_f(\lambda) = P_A(\lambda) \ \text{ est scindé et,} \\ \text{Pour chaque } \lambda_i,\ \dim E_{\lambda_i} = \text{ordre de multiplicité de } \lambda_i \end{cases}$$

Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f (ou A), alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f \quad ou \quad A \quad est\ diagonalisable} \quad &\Leftrightarrow \quad E \quad \text{admet une base formée de vecteurs propres} \\ &\Leftrightarrow \quad E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_P} \\ &\Leftrightarrow \quad \dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \ldots + \dim E_{\lambda_P} \end{aligned}$$

Théorème 5.1.2 *Pour λ valeur propre de f ou de A, $1 \leq \dim E_\lambda \leq$ Ordre de multiplicité de la valeur propre λ.*

Théorème 5.1.3 *Si f ou A, admet n valeurs propres distinctes, alors f ou A, est diagonalisable.*

Démonstration : Toutes les valeurs propres sont simples, chaque sous espace propre E_{λ_i} est donc de dimension 1=ordre de multiplicité de λ_i .

Matrice symétrique réelle

Théorème 5.1.4 *Une matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

6 Recherche pratique

6.1 Diagonalisabilité

1. On calcule $P_A(\lambda)$.

— Si $P_A(\lambda)$ n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.

2. On factorise $P_A(\lambda)$, en particulier, on cherche les valeurs propres multiples.

— S'il n'y en a pas, A est diagonalisable. On a terminé.

3. On cherche la dimension de chaque sous espace propre associé à une valeur propre multiple. On utilisera parfois $\dim E_{\lambda_i} = n - rg(A - \lambda_i I_n)$.

4. Si chaque dimension est l'ordre de multiplicité de la valeur propre, A est diagonalisable. On a terminé.

5. Sinon, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.

Remarque 6.1.1 ***On obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout les différentes bases des sous espaces propres.***

Exemple 6.1.1 — $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *Le polynôme caractéristique de* C *est* $(2-\lambda)^2 + 1$, *ce polynôme n'a pas de racines réelles donc,* C *n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

— $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable.*

En effet, 2 *est valeur propre double de* B, *alors que le sous-espace propre associé à* $\lambda = 2$ *est de dimension* 1. *En effet,* $B - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang* 1 *et donc* E_2 *est de dimension* $2 - 1 = 1 \neq 2$.

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)$ *scindé*

— *On a* $\lambda_1 = 0$ *valeur propre d'ordre de multiplicité* $m_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 3$ *valeur propre d'ordre de multiplicité* $m_2 = 1$, *pour chaque valeur propre on va chercher une base du sous espace propre associé.*

On a $\ker A = E_{\lambda=0} = \{X \in \mathbb{R}^3 / \quad AX = 0\}$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci revient à résoudre l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
On a $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$, *donc*

$$\ker A = E_{\lambda=0} = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) / \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1)) / \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Donc

$$\ker A = E_{\lambda=0} = [\{v_1 = (-1,1,0), v_2 = (-1,0,1)\}]$$

et $\{v_1, v_2\}$ *libre donc* $\{v_1, v_2\}$ *est une base de* $E_{\lambda=0}$ *donc* $\dim E_{\lambda=0} = 2 = m_1$.
$\ker(A - 3I) = E_{\lambda=3} = \{X \in \mathbb{R}^3 / \quad AX = 3X\}$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

On trouve $x_1 = x_2 = x_3$. *Donc*

$$\begin{aligned} \ker(A - 3I) &= \{(x_1, x_1, x_1)/ \quad x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,1,1)/ \quad x_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= [v_3 = (1,1,1)] \end{aligned}$$

donc $\dim E_{\lambda=3} = 1 = m_2$

On conclut que A est diagonalisable.

Méthode 2 $\{v_1, v_2, v_3\}$ *base de* $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres de* A, *alors* A *est diagonalisable.*

7 Polynôme minimal

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$
et soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m \in K_m[X]$.

Posons $P(f) = a_0 id + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_m f^m$.

On appelle polynôme annulateur de f un polynôme P tel que $P(f) = 0$.

Soit $I = \{P \in K[X] \quad / \quad P(f) = 0\}$ idéal des polynômes annulateurs de f.

Définition 7.0.1 *On appelle polynôme minimal de* f *et on note* $P_{\min}$ *le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de* f, $I = \langle P_{\min} \rangle$. *C'est aussi le polynôme annulateur de* f *unitaire et de plus petit degré.*

7.1 Relation entre polynôme minimal et polynôme caractéristique

Théorème 7.1.1 *Soit* f *un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel de dimension finie* n $(n \geqslant 1)$ *(ou* A *une matrice carrée d'ordre* n *). Le polynôme minimal de* f *(respectivement de* A*) divise le polynôme caractéristique de* f *(respectivement de* A*).*

7.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 7.2.1 *Soit* f *un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel de dimension finie et* P *son polynôme caractéristique. Alors* $P(f) = 0$.

Exemple 7.2.1 *Soit la matrice à coefficients réels* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *son polynôme caractéristique est* $P_A(X) = (1 - X)^3$. *Pour déterminer le polynôme minimal de* A *on fait les remarques suivantes :*

1. Il admet 1 *comme unique racine,*

2. Il divise $(1-X)^3$

3. il est unitaire.

4. Cest un polynôme annulateur de A, $(P(A)=0)$

Donc $P_{\min}(X) = (X-1)^2$.

Proposition 7.2.1 *Soit* E *un* $K-$*espace vectoriel de dimension* n, $f \in \mathcal{L}(E)$. *Supposons le polynôme caractéristique de* f *scindé, soient* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *ses racines distinctes alors :*

$$f \text{ diagonalisable} \Longleftrightarrow P_{\min}(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_r)$$

8 Applications de la diagonalisation

8.1 Calcul de la puissance d'une matrice

Si A diagonalisable alors il existe une matrice inversible P, il existe une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$.
On a $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$ et donc

$$A^m = PD^mP^{-1} \quad pour \quad tout \quad m \in \mathbb{N}.$$

En effet :

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et par récurrence très facile $A^m = PD^mP^{-1}$.

De plus, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$ et $A^m = PD^mP^{-1}$.

La matrice A est alors inversible si, et seulement si, D est inversible et on a $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. La formule précédente se généralise alors à $m \in \mathbb{Z}$.

Remarque 8.1.1 *Si* A *est la matrice d'un endomorphisme* f *dans la base* B, *alors* P *est la matrice de passage de la base* B *à une base* B' *de vecteurs propres de* A. *La matrice* P *est obtenue en mettant les coordonnées dans la base* B *des vecteurs propres de* A *en colonnes.*
(De l'ordre des vecteurs propres dans la base B' *dépend l'ordre des valeurs de la diagonale de* D, *et réciproquement.)*

8.2 Calcul d'inverse

Soit $A \in M_n(K)$, supposons $a_0 = \det A \neq 0$, on a $P_A(X) = (-1)^n X^n + \underbrace{(-1)^{n-1} tr(A)}_{a_{n-1}} X^{n-1} + \ldots + \det A$.
On a $P_A(A) = 0$ alors $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0$ alors

$$I = A\underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{-a_0}A^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{-a_0}I\right)}_{A^{-1}}.$$

8.3 Utilisation d'une matrice dont une puissance est nulle

Si $A = (X + Y)$, avec $XY = YX$, alors $A^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k X^k Y^{m-k}$ par la formule du binôme.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ alors $A^m = (X+Y)^m$ avec $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La puissance m^{ieme}de la première matrice est facile à obtenir, la deuxième est bien nilpotente et elles commutent...

8.4 Utilisation d'un polynôme annulateur

Supposons par exemple que $P(X) = X^2 - 3X + 2$, on a alors $P(A) = A^2 - 3A + 2I = 0$

Par division euclidienne de polynômes

On factorise $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$.

A diagonalisable donc $P_{\min}(X) = (X - 1)(X - 2)$ Par simple division euclidienne, on écrit :

$$X^m = Q(X)\, P_{\min}(X) + R(X)$$

avec $\deg(R(X)) < \deg(P_{\min})$ et on a

$$A^m = R(A).$$

On a $X^m = Q(X)(X - 1)(X - 2) + aX + b$

On pose alors successivement $X = 1$ puis $X = 2$.

Ce qui donne

$1 = a + b$

$2^m = 2a + b$

d'où $a = 2^m - 1$, $b = 2 - 2^m$

et enfin

$A^m = R(A) = aA + bI = (2^m - 1)A + (2 - 2^m)I$

Cette méthode est intéressante quand le degré du polynôme annulateur est petit.

8.5 Application aux systèmes différentiels

Il s'agit de trouver n fonctions $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \ldots + a_{1,n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \ldots + a_{2,n}x_n(t) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \ldots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

Ou les $a_{i,j}$ sont des réels ou des complexes, en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, ce système différentiel s'écrit :

$$X'(t) = AX(t).$$

Cas ou A est diagonalisable

Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$, ce qui permet d'écrire le système sous la forme :

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) \Longleftrightarrow \left(P^{-1}X(t)\right)' = D\left(P^{-1}X(t)\right)$$

En posant $U(t) = P^{-1}X(t)$ on obtient le système différentiel $U'(t) = DU(t)$, donc :

$$u_1'(t) = \lambda_1 u_1(t), \qquad u_2'(t) = \lambda_2 u_2(t), \ldots, \quad u_n'(t) = \lambda_n u_n(t).$$

Dont les solutions sont :

$$u_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad , u_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \qquad u_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}.$$

Ou $C_1, C_2, \ldots, C_n$sont des constantes.

Les solutions du système initial s'obtiennent donc en calculant :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \quad \text{donc}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} V_n$$

$(V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont les colonnes de $P)$.

8.6 Systèmes de Suites récurrentes

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telle que

$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ u_0, v_0 données. Ce système est équivalent à

$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$ et par récurrence on trouve

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer u_n et v_n revient à calculer A^n.

2. Illustrons par un exemple :

Déterminer les trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par $u_0 = 1, v_0 = w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4dv_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2dv_n + 5w_n \end{cases}$$

Posons $X_n = (u_n, v_n, w_n)^t$, alors $X_0 = (1, 0, 0)^t$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit alors : $X_{n+1} = AX_n$, d'où, par récurrence, $X_{n+1} = A^n X_n$. On est ainsi ramené au calcul de A^n.

9 Endomorphismes et matrices trigonalisables

Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in M_n(K)$.

On dit que f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Théorème 9.0.1 *f est trigonalisable si et seulement si P_f est scindé. En particulier, si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.*

Proposition 9.0.1 *A est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

En particulier, si A est trigonalisable, sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres (chaque valeur propre étant répétée autant de fois que sa multiplicité) et son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres (répétées là aussi autant de fois que leur multiplicité).

9.1 Endomorphisme nilpotent

Définition 9.1.1 *Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie. On dit que f est nilpotent s'il existe un entier p tel que $f^p = 0$. Le plus petit entier p qui convient s'appel* ***indice de nilpotence de f****.*

Théorème 9.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est nilpotent ;*
- *$P_f(X) = X^n$;*
- *il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.*

Définition 9.1.2 *On dit que A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.*

Corollaire 9.1.1 *A est nilpotente si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.*

9.2 Réduction de Jordan

On peut montrer que toute matrice carrée non diagonalisable est semblable à une matrice triangulaire supérieur T particulièrement simple dite de Jordan, se présentant de la manière suivante :

— Tous les coefficients ne se trouvant pas sur la diagonale principale ou sur la diagonale " juste au-dessus " sont nuls.
— Sur la diagonale principale $(t_{i,i})$, on a les valeurs propres, chacune intervenant autant de fois que son ordre de multiplicité.
— Sur la diagonale " juste au-dessus " $(t_{i,i+1})$, on a des 0 dans les colonnes correspondants à des vecteurs propres, et des 1 ailleurs.

Exemples (E e.v. de dimension finie n, $m(\lambda)$ multiplicité de la valeur propre λ, E_λ espace propre associé à λ.)

1. $n = 2$, $m(\lambda) = 2$ et $\dim(E_\lambda) = 1$. On a $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. $n = 3, m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 2$ et $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$. On a $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
3. $n = 3, m(\lambda) = 3$ et $\dim(E_\lambda) = 2$. On a $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
4. $n = 3, m(\lambda) = 3$ et $\dim(E_\lambda) = 1$. On a $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

La réduction de Jordan d'une matrice A consiste à trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale par blocs, chacun des blocs étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ou λ est une valeur propre de A.

Pour trouver cette réduction, on procède de la façon suivante

1. On cherche les valeurs propres de A.
2. Pour chaque valeur propre λ de A, on construit la suite

$$\ker(A - \lambda I) \subsetneq \ker(A - \lambda I)^2 \subsetneq \ker(A - \lambda I)^3 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(A - \lambda I)^r$$

cette suite s'arrête pour $r \geqslant 1$ tel que $\dim\ker(A - \lambda I)^r = m(\lambda)$.

a. r est la "taille" du bloc de Jordan associé à la valeur propre λ le plus grand.

b. $p = \dim\ker(A - \lambda I)$ est le nombre de blocs de Jordan associés à la valeur propre λ.

Exemple 9.2.1 $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^3$. $\dim\ker(A - 2I) = 1 \neq 3 = m(\lambda)$ *donc* A *n'est pas diagonalisable.*

Posons $M = A - 2I$. *On a* $M^3 = 0$ *donc* $\dim\ker(M^3) = 3 = m(\lambda)$ *et on a* $\dim\ker(M) = 1$, *alors la réduite de Jordan de* A *comporte un bloc de taille* 3.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9.3 Exponentielle d'une matrice carée

Soit A une matrice carrée d'ordre n et t un réel.On définit la matrice $\exp(tA) = e^{tA}$ par

$$\exp(tA) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k^{|}} A^k$$

Pour $t = 1$, e^A s'appelle exponentielle de la matrice A.

9.4 Calcul de $\exp(tA)$ pour des matrices A particulières

1. Si $A = P^{-1}JP$, alors $\exp(tA) = P^{-1}\exp(tJ)P$.
2. Si $A = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$, alors
$$\exp(tA) = diag(\exp(t\lambda_1), \exp(t\lambda_2), \exp(t\lambda_3), \ldots, \exp(t\lambda_n)).$$
3. Si
$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
alors
$$\exp(tA) = e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)^{|}}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{t\lambda} & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & te^{t\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

9.5 Application à la résolution d'équation différentielles

Le système différentiel linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \qquad X_0 \in \mathbb{R}^n \ \text{ donné}$$

admet pour unique solution $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA}X_0$.

Exemple 9.5.1 *Calculons* e^{tA}. *On a* $A = PJP^{-1}$. *Donc* $e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}$ *avec*

$$e^{tJ} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2e^{2t}}{2} \\ & e^{2t} & te^{2t} \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} \quad \textit{Ainsi}$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \frac{t^2e^{2t}}{2} & \frac{t^2e^{2t}}{2} & te^{2t} + \frac{t^2e^{2t}}{2} \\ te^{2t} - \frac{t^2e^{2t}}{2} & e^{2t} - te^{2t} + \frac{t^2e^{2t}}{2} & \frac{t^2e^{2t}}{2} \\ -te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix} \\ X(t) &= e^{tA}X_0 \end{aligned}$$