Serie N°3 d'Algèbre 3

Exercice 1 1. *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

A, B et $A+B$ sont elles diagonalisables ?

2. *Donner la définition de la valeur propre d'une matrice carrée A.*
3. *Trouver les couples (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ tels que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admette le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *pour vecteur propre.*

Exercice 2 *Soient E un espace vectoriel de dimension n finie et f un endomorphisme vérifiant :*

$$f^2 = -id \tag{1}$$

où id est l'application identité et $f^2 =: f \circ f$.

1. *Parmi les trois matrices suivantes, dite laquelle vérifie la relation (1) en justifiant par les calculs.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

2. *Montrer que f n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.*
3. *Soient $x \in E$ et E_{uv} le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux vecteurs $u = x$ et $v = f(x)$.*
   (a) *Calculer $f(u+v)$.*
   (b) *En déduire que E_{uv} est stable par f. (Autrement dit : $f(E_{uv}) = E_{uv}$).*

Exercice 3 *Soit A la matrice à l'endomorphisme f relativement à la base canonique B_c*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) *Montrer que l'ensemble $B = \{(-1,1,0,0); (-1,0,1,0); (-1,0,0,1); (1,1,1,1)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.*
   (b) *Trouver la matrice associer a f relativement a la base B.*
2. (a) *Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+1)^3$.*
   (b) *Montrer que A est diagonalisable.*
   (c) *Trouver une matrice diagonal D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.*
   (d) *Trouver une matrice carré $B \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.*

Exercice 4 *Soient $m \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont sa matrice dans la base canonique est :*

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. *Trouver les valeurs de m pour que A soit inversible.*
2. *Soit $P_f(\lambda)$ le polynôme caractéristique de f.*
   (a) *Calculer $P_f(\lambda)$.*
   (b) *Calculer $P(m)$, $P(\frac{1}{2})$ et $P(1)$.*
   (c) *En déduire les valeurs propres de f.*
3. *Pour quelle valeur de m l'endomorphisme f est diagonalisable ?*
4. *On pose $m = 2$.*
   (a) *Diagonaliser l'endomorphisme f.*
   (b) *Donner l'expression de A^k en fonction de k. ($k \in \mathbb{N}$).*
   (c) *Calculer $Tr(A^k)$ la trace de la matrice A^k en fonction de k.*
5. *En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, Trouver l'inverse de A_m.*