Série de TD N^0 0
Révision

Exercice 1

Soit l'application

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -x+2y+2z) \end{array}$$

1. *Montrer que u est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de u.*
3. *En déduire $dim(ker(u))$ et $dim(Im(u))$.*

Exercice 2

Soit l'application

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, -3x+3y) \end{array}$$

1. *Montrer que u est une application linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de u.*
3. *Est-ce-que u est injective ? surjective ? Justifier.*

Exercice 3

Soit l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-z, 2x+y-3z, -y+2z) \end{array}$$

et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$*
2. *On pose $f_i = f(e_i),\ \ \forall i \in \{1,2,3\}$. Déterminer les coordonnées de f_1, f_2 et f_3 dans la base canonique.*
3. *Trouver une base pour le noyau de f et une base pour l'image de f.*

Exercice 4

Soit l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) \end{array}$$

et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul, tel que $ker(f) = vect(a)$.*
2. *Soient $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$*
   (a) *Calculer $f(a), f(b)$ et $f(c)$.*
   (b) *Montrer que $Im(f) = vect(b,c)$.*
3. *Est-ce-que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$? Justifier.*