

## Série de TD N<sup>o</sup> 1 - Révision -

### Exercice 1

Soit l'application

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
3. En déduire  $\dim(\ker(u))$  et  $\dim(\text{Im}(u))$ .

### Exercice 2

Soit l'application

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
3. Est-ce que  $u$  est injective ? surjective ? Justifier.

### Exercice 3

Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)$$

et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Calculer  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$ .
2. On pose  $f_i = f(e_i)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Déterminer les coordonnées de  $f_1, f_2$  et  $f_3$  dans la base canonique.
3. Trouver une base pour le noyau de  $f$  et une base pour l'image de  $f$ .

### Exercice 4

Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

et soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur  $a \in \mathbb{R}^3$  non nul, tel que  $\ker(f) = \text{vect}(a)$ .
2. Soient  $b = e_1 + e_2$  et  $c = e_2 - e_3$  ;
  - (a) Calculer  $f(a)$ ,  $f(b)$  et  $f(c)$ .
  - (b) Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{vect}(b, c)$ .
3. Est-ce que  $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$  ? Justifier.