

Série de TD N^o 1 - Révision -

Exercice 1

Soit l'application

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de u .
3. En déduire $\dim(\ker(u))$ et $\dim(\text{Im}(u))$.

Exercice 2

Soit l'application

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de u .
3. Est-ce que u est injective ? surjective ? Justifier.

Exercice 3

Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)$$

et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. On pose $f_i = f(e_i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Déterminer les coordonnées de f_1, f_2 et f_3 dans la base canonique.
3. Trouver une base pour le noyau de f et une base pour l'image de f .

Exercice 4

Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul, tel que $\ker(f) = \text{vect}(a)$.
2. Soient $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$;
 - (a) Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$.
 - (b) Montrer que $\text{Im}(f) = \text{vect}(b, c)$.
3. Est-ce que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Justifier.