Série de TD N^0 1

Exercice 1 *Montrer que* $\mathbb{R}[x]$ *muni de la somme et du produit est un anneau commutatif.*

Exercice 2 *(Anneau de Boole). Soit A un anneau tel que tout élément de A soit idempotent (i.e.* $\forall x \in A,\ x^2 = x$*).*

1. *Si* $x \in A$*, montrer que* $2x = 0$*. Montrer que A est commutatif.*
2. *Montrer que si* $x, y \in A$ *alors* $xy(x+y) = 0$*. Que dire si A est intègre ?*

Exercice 3 *On rappel ici qu'un élément x d'un anneau A est nilpotent lorsqu'il existe un entier n strictement positif tel que* $x^n = 0$*. Soit A un anneau commutatif et x ; y deux éléments nilpotents de A.*

1. *Montrer que l'élément* $x.y$ *est aussi nilpotent.*
2. *Est ce que l'élément* $x + y$ *est nilpotent ?*
3. *Montrer que l'élément* $1 - x$ *est inversible, et calculer son inverse.*

Exercice 4 *Effectuer la division euclidienne de :*

1. $4X^5 - 2X^4 + 5X^3 + 4X + 2$ *par* $X^2 + 1$.
2. $4X^5 - 2X^4 + 5X^3 + X^2$ *par* $4X^3 - 2X^2 + X + 2$.
3. $-2X^5 - 2X^4 - X^3 + 4X^2 + 4X + 2$ *par* $X^2 + X + 1$.

Exercice 5 *Déterminer le* $PGCD(P;Q)$ *dans chaque cas :*

1. $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ *et* $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ *et* $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.
3. $P(X) = X^n - 1$ *et* $Q(X) = (X-1)^n$ *;* $n \geq 1$.

Exercice 6

1. *Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$ *les polynômes suivants 1.* $X^4 + 1$ *2.* $X^8 - 1$ *3.* $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ *4.* $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.
2. *En déduire une décomposition de* $X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ *en produit de facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$.