

Série de TD N° 2

Exercice 1 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A + B$, AB , BA , A^2 et B^2 .
2. A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2(A \times B)$?

Exercice 2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A + 3I$.

1. Exprimer B^2 en fonction de B .
2. En déduire A^2 en fonction de A .
3. La matrice A est elle inversible.

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 .
2. En déduire A^{-1} .
3. Retrouver A^{-1} par une autre méthode.

Exercice 3 Calculer les déterminants suivants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Indications :

- Pour D_2 on remarque que $l_3 = l_1 + l_2$, donc $D_2 = 0$.
- Pour calculer D_3 , on peut choisir la ligne 2 ou la colonne 2 (puisque'on a 2 zéros), si on choisit la deuxième colonne c_2 , on fait des opérations sur les lignes pour avoir un troisième zéro, c.a.d. $l'_1 = l_1 - 2l_2$.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1-2.0 & 2-2.1 & 3-2.4 & 1-2.0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l'_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

On obtient 3 zéros dans la deuxième colonne, donc on calcul D_3 selon la deuxième colonne.

Exercice 4 1. Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

2. Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y) \mapsto (4x - 3y, x + y) \quad (x, y) \mapsto 8x - 3y \quad x \mapsto (x, -3x, 11x, 0)$$

Exercice 5 Soit $E = F = \mathbb{R}_2[X] = \{P = aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, on munit $\mathbb{R}_2[X]$ de la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$. Soit f l'application définie par $f(P) = P'$. Déterminer $M_B(f)$, la matrice de f relativement à B .

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique B de \mathbb{R}^4 et B' de \mathbb{R}^3 est

$$A = M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base du noyau de f .
2. Déterminer une base de l'image de f . Quel est le rang de A ?

Exercice 7 Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 , A^3 .
2. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$ et déduire que A est inversible.
3. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I .
4. Exprimer A^4 en fonction de A^2 , A et I .

Exercice 8 Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de passage P de B à B' . Calculer P^{-1} .
3. Déterminer la matrice A' de u dans la base B' .
 - Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de A' .
 - Calculer A'^4 .
 - En déduire A^{4n} .