Série de TD N^0 2

Exercice 1 *Soient*

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.*
2. *Calculer* $3A+2C$ *et* $5B-4D$.
3. *Trouver* α *tel que* $A-\alpha C$ *soit la matrice nulle.*

Exercice 2 1. *Soient*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

Quels produits sont possibles ? les calculer.

2. *Soient* $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^2, B^2, AB *et* BA.
3. *Soient* $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^p *et* B^p *pour tout* $p \geq 0$. *Montrer que* $AB=BA$, *Calculer* $(A+B)^p$.

Exercice 3 *On considère les matrices*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $A+B$, AB, BA, A^2 *et* B^2.
2. *A-t-on* $(A+B)^2=A^2+B^2+2(A\times B)$?

Exercice 4 *Calculer les déterminants suivants*

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Indications :

- *Pour* D_2 *on remarque que* $l_3=l_1+l_2$, *donc* $D_2=0$.
- *Pour calculer* D_3, *on peux choisir la ligne 2 ou la colonne 2 (puisqu'on a 2 zéros), si on choisit la deuxième colonne, on fait des opérations sur les lignes pour avoir un troisième zéro, c.a.d.* $l_1'=l_1-2l_2$.

$$D_3=\begin{vmatrix} 1-2.0 & 2-2.1 & 3-2.4 & 1-2.0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} l_1' \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

On obtient 3 zéros dans la deuxième colonne, donc on calcul D_3 *selon la deuxième colonne.*

Exercice 5 1. *Déterminer le rang des matrices suivantes.*

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

2. *Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (4x-3y, x+y) \end{array},\quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 8x-3y \end{array},\quad \begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^4 \\ x & \mapsto & (x,-3x,11x,0) \end{array}.$$

Exercice 6 *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,z,-y) \end{array}$$

une application linéaire.

1. *Montrer que la matrice associée a f dans la base canonique est la matrice A définie par*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Calculer A^2, A^3.*
3. *Calculer A^3-A^2+A-I et déduire que A est inversible.*
4. *Calculer A^{-1} par deux méthodes.*

Exercice 7 *On considère la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On pose $B=A+3I$.

1. *Exprimer B^2 en fonction de B.*
2. *En déduire A^2 en fonction de A.*
3. *La matrice A est elle inversible.*

Soit A la matrice définie par

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer A^2.*
2. *En déduire A^{-1}.*
3. *Retrouver A^{-1} par une autre méthode.*

Exercice 8 *Soit $E=F=\mathbb{R}_2[X]=\left\{P=aX^2+bX+c/\quad a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$, on munit $\mathbb{R}_2[X]$ de la base canonique $B=\left\{1,X,X^2\right\}$. Soit f l'application définie par $f(P)=P'$.*
Déterminer $M_B(f)$, la matrice de f relativement à B.

Exercice 9 *Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique B de $\mathbb{R}^4$ et B' de $\mathbb{R}^3$ est*

$$A = M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer une base du noyau de f.*
2. *Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?*

Exercice 10 *Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.*
3. *Déterminer la matrice A' de u dans la base B'.*
   – *Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de A'.*
   – *Calculer A'^4.*
   – *En déduire A^{4n}.*