Série de TD N^0 2

Semestre 4 —– 2020-2021

Exercice 1

1. *Déterminer la formes linéaires f , g et h de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\begin{array}{lclcl} f(1,1,1)=0 & , & f(2,0,1)=1 & , & f(1,2,3)=4 \\ g(-1,0,1)=1 & , & g(2,0,1)=0 & , & g(2,2,3)=2 \\ h(1,3,0)=0 & , & h(2,0,-1)=-1 & , & h(1,0,2)=-2 \end{array}$$

2. *Donner des bases pour les noyaux de f, g et h.*

Exercice 2

Démontrer que les applications suivantes sont des formes linéaires sur E

1. *Si $E=k[X]$: l'espace des polynômes à coefficients dans k, pour tout $x \in k$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} ev_x : & k[X] & \to & k \\ & P(X) & \mapsto & P(x) \end{array}$$

   d'évaluation de $P(X)$ en x.

2. *Si $E=\mathcal{M}_2(k)$: l'espace des matrices carrés de rang 2, l'application*

$$\begin{array}{rccc} tr : & \mathcal{M}_n(k) & \to & k \\ & A & \mapsto & tr(A) \end{array}$$

Exercice 3

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $(\mathbb{R}^2)^*$ définis par

$$f_1(x,y)=x+y \quad \text{et} \quad f_2(x,y)=x-y$$

1. *Montrer que $\mathcal{F}=(f_1,f_2)$ forme une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.*
2. *Exprimer les formes linéaires suivantes dans $\mathcal{F}$:*

$$g(x,y)=x, \quad h(x,y)=2x+6y, \quad t(x,y)=-y, \quad k(x,y)=-3x+5y.$$

Exercice 4

1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit E^* son espace dual. Montrer que* $\dim E = \dim E^*$.
2. *Soient ϕ et φ deux formes linéaires sur un espace vectoriel E. Montrer que*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^* \mid \phi = \alpha\varphi \Leftrightarrow \ker(\phi)=\ker(\varphi).$$

Exercice 5

Soit $E=\mathbb{R}^5$ muni de la base canonique $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$.

Soit $F=vect(v_1,v_2,v_3,v_4)$ tels que $v_1=(1,0,2,0,3); v_2=(2,0,1,0,-1); v_3=(-1,0,1,0,2)$ et $v_4=(-1,0,4,0,9)$.

1. *Déterminer le rang de F.*
2. *Déterminer une base de F, sa dimension et un supplémentaire[1] dans E.*

1. Un supplémentaire d'un sous espace vectoriel F de E est un sous espace vectoriel de E tel que $F \oplus G = E$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ de dimension 3. On pose que (e_1, e_2, e_3) est une base pour E. Soient $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ les formes linéaires sur E données par $\begin{cases} f_1^* &= 2e_1^* + e_2^* + e_3^* \\ f_2^* &= -e_1^* + 2e_3^* \\ f_3^* &= e_1^* + 3e_2^* \end{cases}$

1. *Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^*.*
2. *Déterminer la base (f_1, f_2, f_3) de E dont (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est la base dual.*

Exercice 7

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, on pose

$$F = \{(x, y, z) \in E \ | \ x + y - 2z = 0\}$$

1. *Justifier que F est un hyperplan.*
2. *En déduire sa dimension.*
3. *Donner toutes les equations de F.*
4. *Donner une base de F.*
5. *Donner tous ses supplémentaires.*

Exercice 8

Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \ | \ x + y - z - t = 0\}$$

1. *Justifier que F est un hyperplan.*
2. *En déduire sa dimension.*
3. *Donner toutes les equations de F.*
4. *Donner une base de F.*
5. *Donner tous ses supplémentaires.*

Exercice 9

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$, on pose

$$F = \{P \in E \ | \ P(1) + P'(0) = 0\}$$

1. *Justifier que F est un hyperplan.*
2. *En déduire sa dimension.*
3. *Donner toutes les equations de F.*
4. *Donner une base de F.*
5. *Donner tous ses supplémentaires.*