Série de TD N^0 3

Exercice 1 *Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la représentation matricielle dans la base canonique B est donnée par la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Trouver les valeurs propres de A. (On doit trouver deux valeurs propres distinctes.)*
3. *Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre.*
4. *Montrer que la matrice A est diagonalisable, et proposer une base B' de vecteurs propres. Calculer $D = Mat_{B'}(u)$, la représentation matricielle de u dans la base B'. Donner la matrice de passage, notée P, de la base canonique B à la base B' trouvée à la question précédente, et donner une relation entre A, P et D.*

Exercice 2 *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ($A = Mat_B(f)$).

1. *Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f.*
2. *Montrer que A est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.*
3. *On considère, pour tout nombre réel a la matrice réelle :*

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   Exprimer M_a en fonction de A et en déduire, que pour tout nombre réel a, il existe une matrice diagonale D_a, que l'on calculera, telle que $PD_aP^{-1} = M_a$.
4. *Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible.*

Exercice 3 *Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer $(A - 2I_3)^2$, $\quad (A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *En déduire A^n.*

Exercice 4 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

1. *Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.*
2. *Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D = M^3$ telle que $A = PDP^{-1}$. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.*

Exercice 5 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que f est trigonalisable.*
2. *Montrer que l'espace propre associée à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1,1,0)$ est un vecteur non nul de cet espace propre.*
3. *Montrer que $v = (0,0,1)$ est tel que $(f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u$*
4. *Cherchons un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u,v,w).*

Exercice 6 *Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que sa représentation matricielle (dans la base canonique) soit donnée par la matrice suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de B, en déduire les valeurs propres de B.*
2. *Montrer que u est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.*
3. *Déterminer les sous espaces propres de u. En déduire que u n'est pas diagonalisable.*
4. *Dans la suite on cherche à calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$*
   — *Soit $P(x) = (x-1)^2(x+1)$. Montrer que $P(B) = 0$.*
   — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division Euclidienne de x^n par $P(x)$. Le reste étant un polynôme de degré 2, il existe des coefficients réels a_n, b_n, c_n et un polynôme $Q(x)$ tels que*
   $$x^n = P(x)Q(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n, \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Montrer le système d'équations
   $$\begin{aligned} (-1)^n &= a_n - b_n + c_n \\ 1 &= a_n + b_n + c_n \\ n &= 2a_n + b_n \end{aligned}$$
   — *En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.*
   — *En déduire une expression de B^n en fonction de n.*

Exercice 7 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de $f \in L(\mathbb{R}^3)$ par rapport à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$, montrer que A est trigonalisable et déterminer $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*

Exercice 8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. *Montrer que A est diagonalisable.*
2. *En utilisant le théorème de Cayeley Hamilton, calculer* A^{-1} *(s'il existe)*
3. *Vérifier que* $P_{min} = X^2 - X - 2$ *, calculer* A^n.

Exercice 9 *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$$