Cours :
Béton Armé II

3ème année licence Génie Civil

Dr. ZENDAOUI Abdelhakim

CHAPITRE 01 : VERIFICATION DE LA FLEXION SIMPLE à L'E.L.S

Il est nécessaire de vérifier à l'E.L.S que la compression du béton reste admissible ainsi que la traction dans les armatures, pour cela on s'assure que les contraintes maximales du béton et de l'acier sont inférieures aux contraintes limites imposées.

- La contrainte admissible du béton à l'E.L.S : $\bar{\sigma}_{bc} = 0{,}6 \,.\, f_{c28}$

- La contrainte admissible de l'acier à l'E.L.S :

$\bar{\sigma}_s = min\left\{\frac{2}{3} f_e \,;\, 110\sqrt{\mu f_{t28}}\right\}$ en fissuration préjudiciable

$\bar{\sigma}_s = min\left\{\frac{1}{2} f_e \,;\, 90\sqrt{\mu f_{t28}}\right\}$ en fissuration très préjudiciable

Donc : il faut trouver que : $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$

Remarque : Si certaines conditions ne vérifient pas, on dit que les sections A_s et A'_s sont insuffisantes et on doit augmenter l'inertie I.

1- Les hypothèses de vérifications à l'E.L.S :

Hypothèse (1) **:** Les sections droites planes avant déformation restent planes après déformation.

Hypothèse (2) **: L**e béton tendu est négligé.

Hypothèse (3) : Le béton et l'acier seront considéré comme des matériaux linéaires élastiques, donc on leur applique la loi de HOOKE $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\sigma = E \,.\, \varepsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma_b = E_b . \varepsilon_b} \text{ (Béton)}$$

$$\boldsymbol{\sigma_s = E_s . \varepsilon_s} \text{ (Acier)}$$

Hypothèse (4) : Une adhérence parfaite entre l'acier et le béton permet d'écrire l'égalité des déformations : $\boldsymbol{\varepsilon_b = \varepsilon_s}$

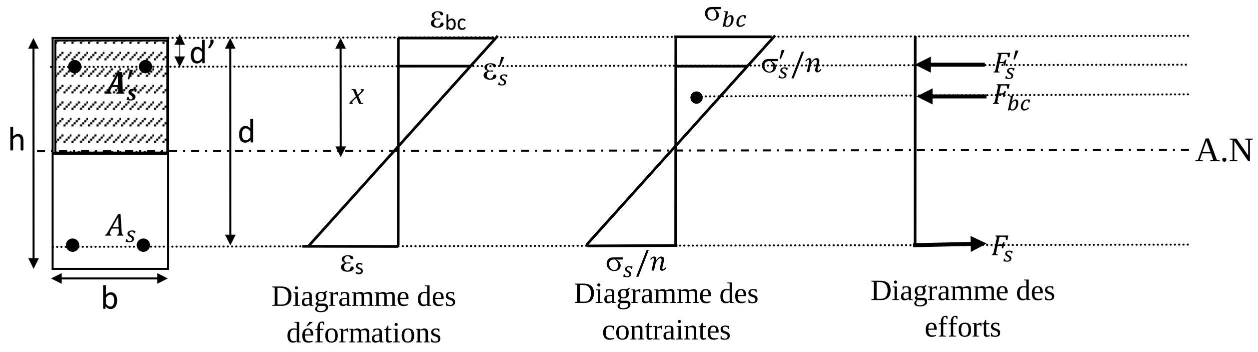
Donc à partir de l'hypothèse (3) on trouve que : $\boldsymbol{\frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_s}{E_s}}$

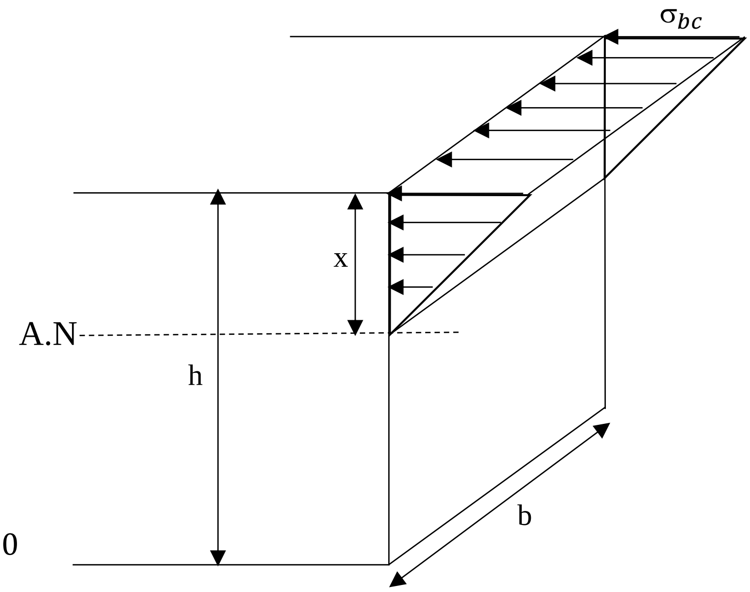
On pose : $n = \frac{E_s}{E_b}$ **:** Coefficient d'équivalence égal 15.

$$\Rightarrow \frac{\sigma_s}{\sigma_b} = \frac{E_s}{E_b} = n \Rightarrow \sigma_s = n.\sigma_b$$

$\Rightarrow$ La contrainte d'acier σ_s travaille n fois la contrainte du béton σ_b, donc il faut homogénéiser la section du béton armé.

2- Détermination de l'axe neutre x :





En utilise l'équilibre des forces :

$F_{bc} + F'_s - F_s = 0$

$F'_s = \sigma'_s.A'_s$
$F_s = \sigma_s.A_s$

$F_{bc} = \frac{1}{2}.b.x.\sigma_{bc}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.b.x.\sigma_{bc} + \sigma'_s.A'_s - \sigma_s.A_s = 0$

$\sigma_{bc} = E_b.\varepsilon_{bc}$ et $\sigma_s = E_s.\varepsilon_s$ et $\sigma'_s = E_s.\varepsilon'_s$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.b.x.E_b.\varepsilon_{bc} + E_s.\varepsilon'_s.A'_s - E_s.\varepsilon_s.A_s = 0$

A partir des diagrammes des déformations :

$\frac{\varepsilon_{bc}}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-d'} \Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{x-d'}{x}.\varepsilon_{bc}$ et $\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon_{bc}}{x} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{d-x}{x}.\varepsilon_{bc}$ et $E_s = n.E_b$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.b.x.E_b.\varepsilon_{bc} + n.E_b.\frac{x-d'}{x}.\varepsilon_{bc}.A'_s - n.E_b.\frac{d-x}{x}.\varepsilon_{bc}.A_s = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}.b.x^2 + n.A'_s.(x-d') - n.A_s.(d-x) = 0}$$

3- Détermination du moment d'inertie I :

$I = I_b + n.I'_s + n.I_s$

$I_b = \frac{bx^3}{3}$ et $I'_s = A'_s.(x - d')^2$ et $I_s = A_s.(d - x)^2$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{bx^3}{3} + n.A'_s.(x - d')^2 + n.A_s.(d - x)^2}$$

4- Calcul des contraintes σ_{bc}, σ_s et σ'_s :

La loi générale est : $\sigma_i = \frac{M}{I_i}.x_i$

Donc : Pour le béton : $\sigma_{bc} = \frac{M_s}{I}.x \leq \overline{\sigma_{bc}}$

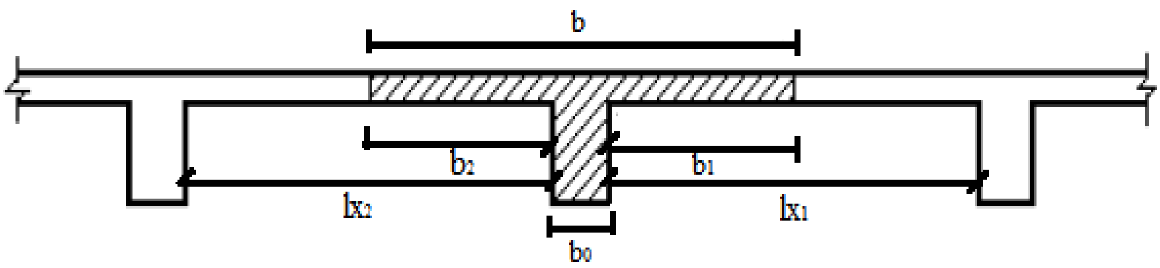
Pour les armatures tendues (A_s) : $\frac{\sigma_s}{n} = \frac{M_s}{I}.(d - x) \Rightarrow \sigma_s = n.\frac{M_s}{I}.(d - x) \leq \overline{\sigma_s}$

Pour les armatures comprimées (A'_s) : $\frac{\sigma'_s}{n} = \frac{M_s}{I}.(x - d') \Rightarrow \sigma'_s = n.\frac{M_s}{I}.(x - d') \leq \overline{\sigma_s}$

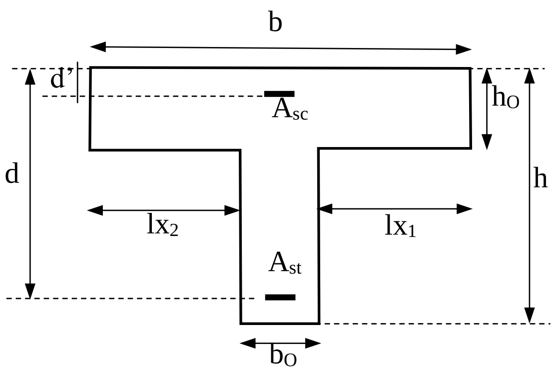
CHAPITRE 02 : LA FLEXION SIMPLE POUR LES SECTION EN ‘T’

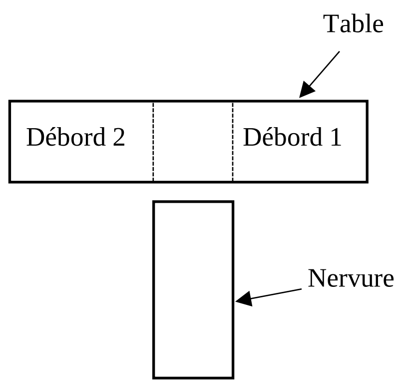
1- Définition :

Les sections en *T* se rencontrent fréquemment dans les constructions en béton armé, par exemple dans les planchers, les murs de soutènement, les tabliers de pont et d'une manière générale. Cette forme de section résulte de la suppression de la plus grande partie du béton tendu, le béton qui ne constitue qu’un poids mort inutile étant donné qu’il est négligé dans calculs de résistance.



Une poutre en T est constituée par une retombée de section réctangulaire qui s’appelle l’âme ou la nervure, située en dessous d’une table en béton armé qui s’appelle la table.

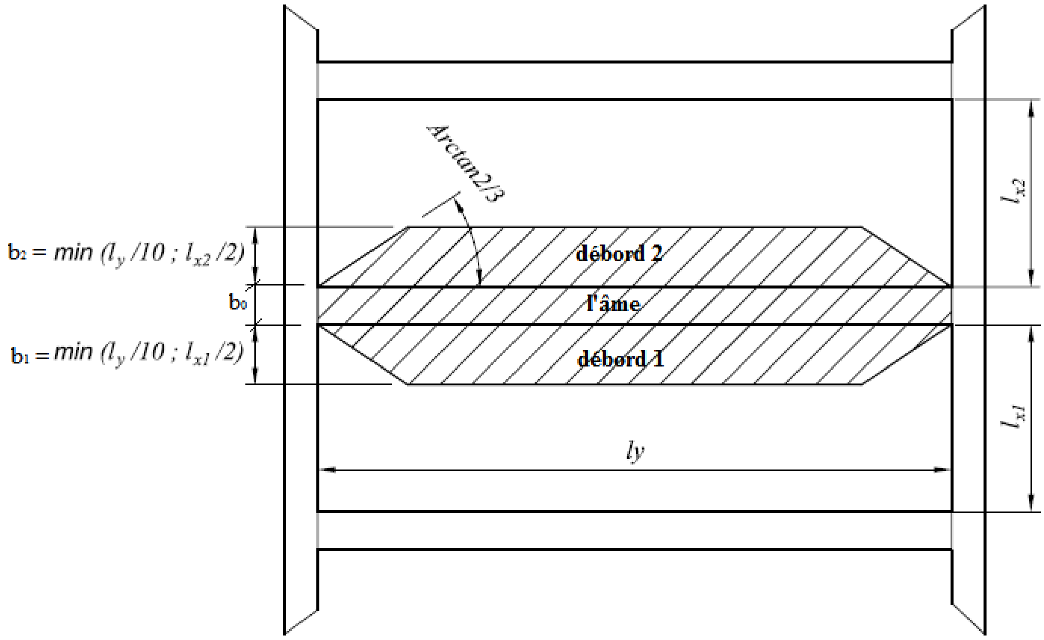




Pour définir la largeur du débord, on utilise la règle du B.A.E.L comme suit :

$$b_{(1,2)} = min \begin{cases} -Le\ dixième\ de\ la\ portée\ de\ la\ poutre :\ \dfrac{l_y}{10} \\ -la\ moitiè\ de\ la\ distane\ entre\ 2\ poutres\ supportant\ la\ même\ dalle :\ \dfrac{l_{x(1,2)}}{2} \end{cases}$$

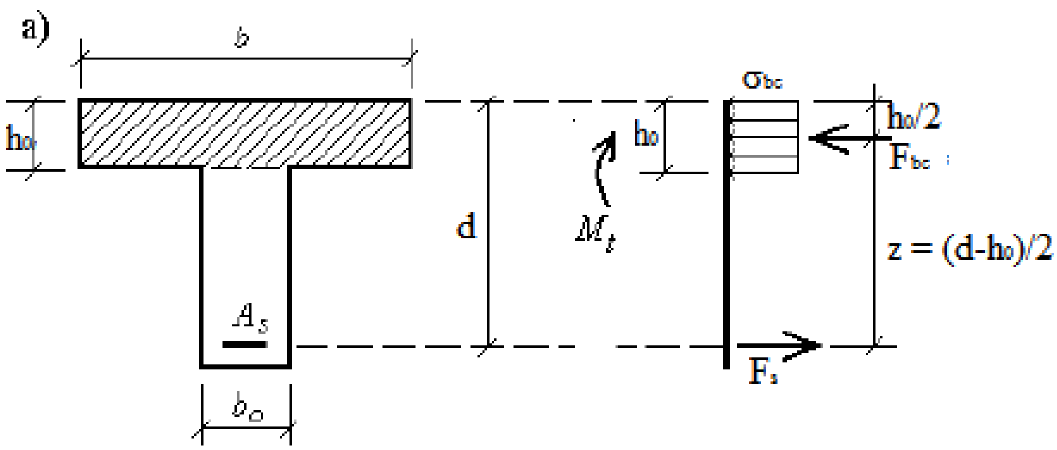
$$\Rightarrow\ b_{(1,2)} = min\left(\frac{l_y}{10}\ ;\ \frac{l_{x(1,2)}}{2}\right)$$



⇒ b (la largeur de la table) = la largeur de débord 1 (b_1) + la largeur de débord 2 (b_2) + la largeur de l'âme (b_0)

2- Détermination du ferraillage à l'E.L.U :

En commençant le calcul par la détermination du moment à la table M_t, on suppose que cette valeur du moment est dans la zone comprimée pour une hauteur égale à h_0.



On a : $F_{bc} = \sigma_{bc} . b . h_0$

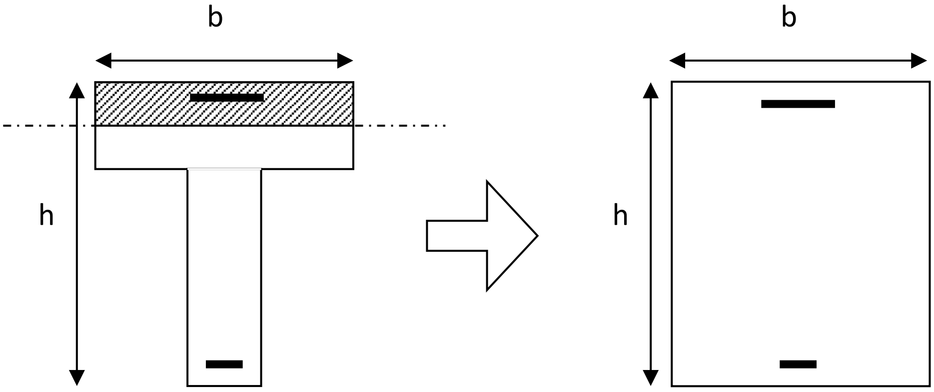
L'effort F_{bc} passe à la distance $h_0/2$,en prenant le moment par rapport au centre des armatures tendues on peut écrire :

$M_t = F_{bc} \,.\, z$

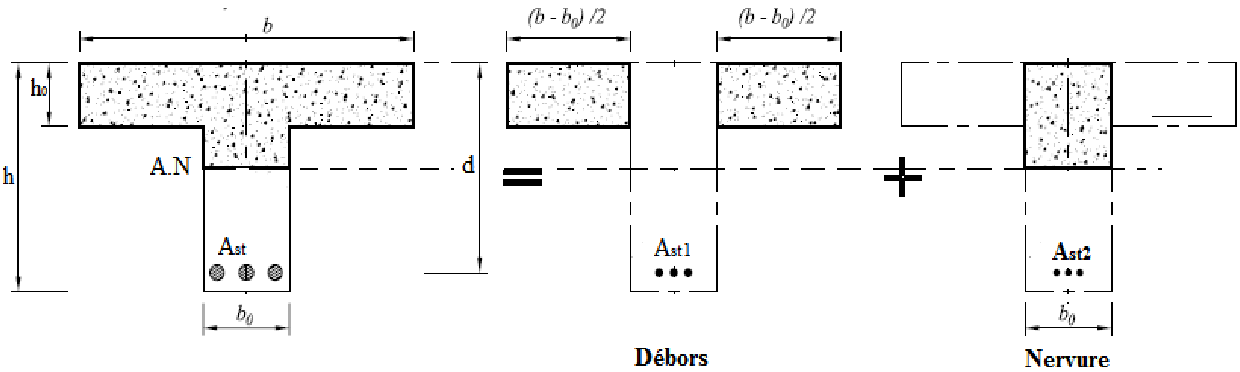
$M_t = \sigma_{bc} . b . h_0 \left(d - \dfrac{h_0}{2} \right)$

Dans l’étude des sections en T on distingue 2 cas :

-Si $M_u \leq M_t$ donc la table n’est pas entièrement comprimée et la section T est calculée comme une section rectangulaire de largeur b et hauteur h.



-Si $M_u > M_t$ donc la table est pas entièrement comprimée et aussi une partie de la nervure, les armatures seront déterminées par la décomposition de la section en 2 parties (la nervure et les débords de la table).



Moment équilibré par les débords :

$M_d = 2 \left(\dfrac{b - b_0}{2} \right) \sigma_{bc} . h_0 \left(d - \dfrac{h_0}{2} \right)$

$M_d = (b - b_0) \sigma_{bc} . h_0 \left(d - \dfrac{h_0}{2} \right)$

$M_d = \left(\dfrac{b - b_0}{b} \right) b \,.\, \sigma_{bc} \,.\, h_0 \left(d - \dfrac{h_0}{2} \right)$

$M_d = \left(\dfrac{b - b_0}{b} \right) M_t$

$\Rightarrow \quad A_{st1} = \frac{M_d}{\sigma_s\left(d-\frac{h_0}{2}\right)}$

Moment équilibré par la nervure : le moment résiduel sera : $M_u - M_d$

$$\eta_u = \frac{M_u - M_d}{\sigma_{bc}\ b_0\ d^2}$$

On calcule : $\eta_l = 0{,}81\alpha_l(1 - 0{,}4\alpha_l)$

Avec : $\alpha_l = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{bc}+\varepsilon_l}$ et $\varepsilon_l = \frac{f_e}{E_s\,\gamma_s}$

- Si : $\eta_u < \eta_l$ **: (que les armatures tendues A_{st})** :

  $y = d(1 - 0{,}4\alpha)$; $\alpha = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2\eta_u}\right)$

Donc : $A_{st2} = \frac{M_u - M_d}{y.\sigma_s}$

$\Rightarrow$ La section des armatures tendues : $A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$

- Si $\eta_u \geq \eta_l$: **(les armatures tendues A_{st} et comprimées A_{sc}) :**

  On prend : $x_l = \alpha_l . d$:

  - Si : $0.8x_l \geq h_0 \Rightarrow M_R = \eta_l . b_0 . d^2 . \sigma_{bc}$ et $y_l = d(1 - 0.4\alpha_l)$

Donc : $A_{st2} = \frac{1}{\sigma_s}\left(\frac{M_u - M_d - M_R}{d - d'} + \frac{M_R}{y_l}\right)$

$\Rightarrow$ La section des armatures tendues : $A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$

La section des armatures comprimées : $A_{sc} = \frac{M_u - M_d - M_R}{\sigma_s\,(d - d')}$

  - Si : $0.8x_l < h_0$: La section sera considérée comme une section rectangulaire (b x h) soumise à un moment M_u.

3- Vérification à l'E.L.S :

a- Détermination de l'axe neutre x :

Par l'équilibre des moments statiques :

$$\frac{1}{2}bx^2 + \left(\frac{b - b_0}{2}\right)(x - h_0)^2 + n.A_{sc}(x - d') - n.A_{st}(d - x) = 0$$

b- Détermination du moment d'inertie I :

Les moments d'inerties s'écriront :

- Si l'axe neutre est dans la table : $I_b = \frac{bx^3}{3}$

- Si l'axe neutre est dans la nervure : $I_b = \frac{bx^3}{3} - \left(\frac{b-b_0}{3}\right)(x-h_0)^3$

$I_{st} = A_{st}(d-x)^2$ et $I_{sc} = A_{sc}(x-d')^2$

$I = I_b + n.I_{st} + n.I_{sc}$

$\Rightarrow \; I = I_b + n.A_{st}(d-x)^2 + n.A_{sc}(x-d')^2$

C- Détermination des contraintes :

Pour le béton : $\sigma_{bc} = \frac{M_s}{I}x \le \bar{\sigma}_{bc} = 0{,}6\,.f_{c28}$

Pour les aciers tendus (A_{st}) : $\sigma_{st} = n\frac{M_s}{I}(d-x) \le \bar{\sigma}_s$

Pour les aciers comprimés (A_{sc}) : $\sigma_{sc} = n\frac{M_s}{I}(x-d') \le \bar{\sigma}_s$

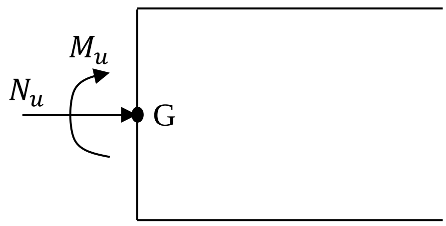
$\bar{\sigma}_s = min\left\{\frac{2}{3}f_e\,; 110\sqrt{\mu\, f_{t28}}\right\}$ en fissuration préjudiciable

$\bar{\sigma}_s = min\left\{\frac{1}{2}f_e\,; 90\sqrt{\mu\, f_{t28}}\right\}$ en fissuration très préjudiciable

CHAPITRE 03 : LA FLEXION COMPOSEE

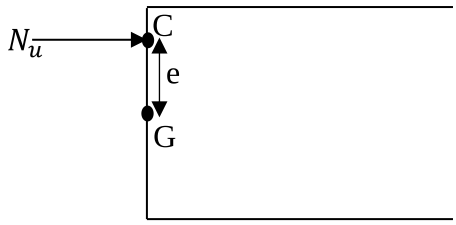
1- Définition :

Une poutre est sollicitée en flexion composée lorsqu'elle est définie par un effort normal N_u et un moment fléchissant M_u appliqués au centre de gravité G de la section du béton.

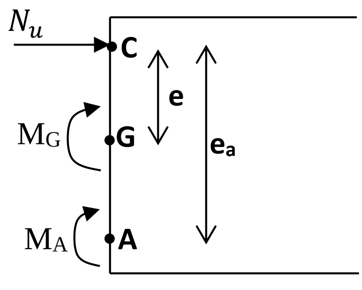


Le système constitué par M_u et N_u peut etre remplacé par une force unique N_u appliquée au centre de pression C. La distance entre le point C et G c'est l'excentricité e :

$$e = \frac{M_u}{N_u}$$



En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces car la valeur des moments est dépendante de ce point. Ce point sera normalement, soit au centre de gravité du béton G ; soit au centre de gravité des armatures tendues (A).

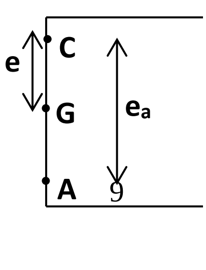


$$e = \frac{M_G = M_u}{N_u}$$

$$e_a = \frac{M_A}{N_u}$$

En flexion composée, la première chose à faire est de chercher la position du centre de pression (C).

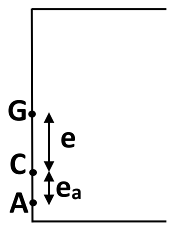
- Si (N) est un effort de compression, (C) sera posé au-dessus de (G).



$$\Rightarrow e_a \geq e$$

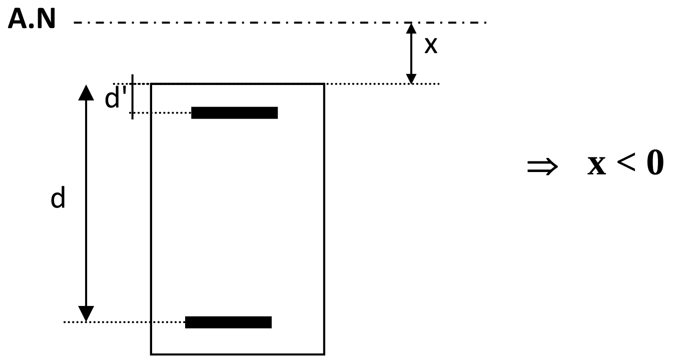
Le point C peut se situer en dehors de la section, donc e peut être supérieur à $\frac{h}{2}$: e > $\frac{h}{2}$.

- Si (N) est un effort de traction, (C) sera posé au-dessous de (G) (à côté de A).

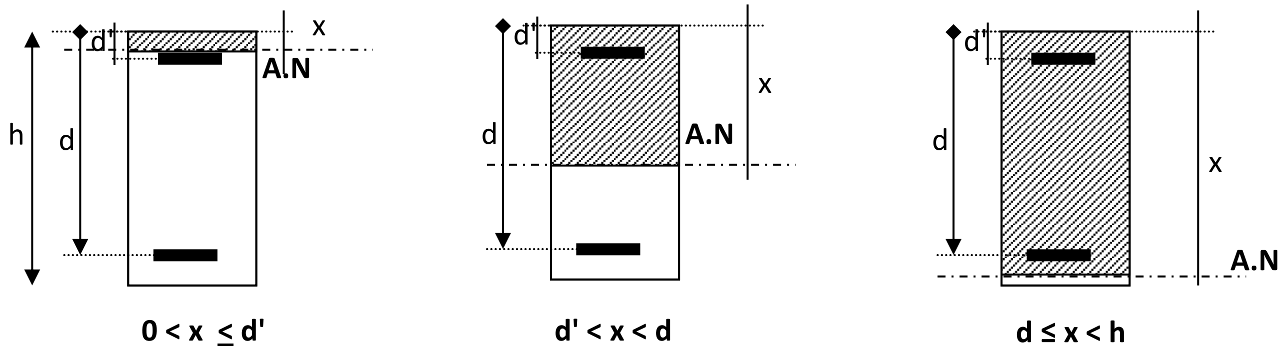


En flexion composée, la section peut être :

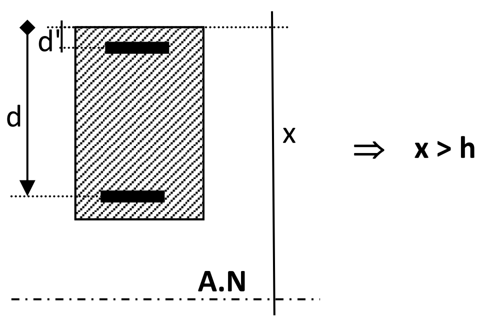
1) entièrement tendue sous un effort de traction :



2) partiellement comprimée sous un effort de traction ou compression : Nous avons 3 cas de position de l'axe neutre :



3) La section peut être entièrement comprimée sous un effort de compression :

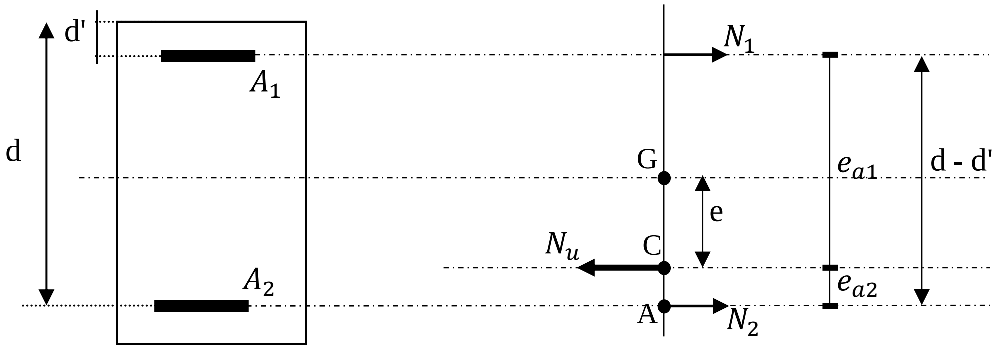


2- Détermination des armatures :

2.1- Section entièrement tendue :

Une section sera entièrement tendue si l'effort N est un effort de traction et si le centre de pression *"C"* se trouve entre les armatures.

Dans ce cas, N_u peut être décomposé en deux forces de traction N_1 et N_2 passant par les centres de gravité des armatures supérieures et des armatures inférieures.



On a : A_1 la section des armatures supérieures et A_2 la section des armatures inférieures, Donc :

$N_1 = A_1 . \sigma_s$ et $N_2 = A_2 . \sigma_s$

Par l'équilibre des forces :

$$-N_u + N_1 + N_2 = 0$$

$-N_u + A_1 . \sigma_s + A_2 . \sigma_s = 0$--------(1)

La somme des moments par rapport à A :

$$\sum M/_A = -N_u . e_{a2} + N_1 \, (\mathrm{d} - \mathrm{d}') = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{N_u . e_{a2}}{\sigma_s (d - d')}$$

On remplace A_1 dans l'équation (1) :

$$-N_u + \frac{N_u . e_{a2}}{\sigma_s (d - d')} . \sigma_s + A_2 . \sigma_s = 0$$

$$-N_u + \frac{N_u . e_{a2}}{(d - d')} + A_2 . \sigma_s = 0$$

$$A_2 . \sigma_s = N_u - \frac{N_u . e_{a2}}{(d - d')}$$

$$A_2 . \sigma_s = N_u \left(1 - \frac{e_{a2}}{(d - d')}\right)$$

$$A_2 . \sigma_s = N_u \left(\frac{d - d' - e_{a2}}{(d - d')} \right)$$

$$A_2 . \sigma_s = \frac{N_u \, . \, e_{a1}}{(d - d')}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{N_u . e_{a1}}{\sigma_s (d - d')}$$

2.2- Section partiellement comprimée :

Une section sera partiellement comprimée :

- si le centre de pression *C* se trouve à l'extérieur des armatures (l'effort normal *N* peut être de traction ou de compression).

- si le centre de pression *C* se trouve entre les armatures (l'effort normal *N* est un effort de traction ou de compression) et la condition suivante est vérifiée :

$$N_u(d - d') - M_{AS} \leq \left[0{,}337 - \left(0{,}81 \frac{d'}{h} \right) \right] b . h^2 . \sigma_{bc}$$

Avec : $M_{\boldsymbol{AS}} = M_u + N_u(0{,}5h - d')$, il représente le moment par rapport au centre de gravité des armatures inferieures (As).

On prend : $\eta = \frac{M_{AS}}{b \, d^2 \sigma_{bc}}$

$\Rightarrow$ On compare η avec η_l : $\eta_l = 0{,}81\alpha_l(1 - 0{,}4\alpha_l)$ (calculé déjà dans la flexion simple)

- Si : $\eta \leq \eta_l \Rightarrow$ il y a que les armatures inférieures (As) :

$$A_s = \frac{1}{\sigma_s} \left(\frac{M_{AS}}{d - d'} \pm N_u \right)$$

On utilise : (+) si l'effort N_u est un effort de traction.

(-) si l'effort N_u est un effort de compression.

- Si : $\eta > \eta_l \Rightarrow$ il y a les armatures inférieures (As) et supérieures (A'_s) :

On calcule le moment résistant : $M_R = \eta_l \, . b . \, d^2 \sigma_{bc}$

$$\Rightarrow \quad A_s = \frac{1}{\sigma_s} \left(\frac{M_{AS} - M_R}{d - d'} + \frac{M_R}{d(1 - 0{,}4\alpha_l)} \pm N_u \right)$$

$$A'_s = \frac{M_{AS} - M_R}{\sigma_s (d - d')}$$

2.3- Section entièrement comprimée :

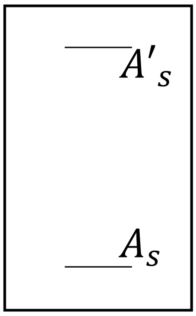
Une section sera entièrement comprimée si l'effort *N* est un effort de compression et son point d'application (le centre de pression *C)* se trouve entre les armatures.

Pour calculer les sections d'armatures dans ce cas il faut vérifier la condition suivante :

$$N_u(d-d') - M_{AS} \leq (0,5h - d')b.h.\sigma_{bc}$$

-Si : $N_u(d-d') - M_{AS} \leq (0,5h - d')b.h.\sigma_{bc}$:

On calcule Ψ : $\Psi = \dfrac{0,5 - \frac{d'}{h} - \frac{(d-d')N_u - M_{AS}}{b\,.\,h^2\,.\,\sigma_{bc}}}{0.86 - \frac{d}{h}}$



$\Rightarrow A'_s = \dfrac{N_u - (1-\Psi)b\,h\,\sigma_{bc}}{\sigma_s}$ et $A_s = 0$

-Si : $N_u(d-d') - M_{AS} > (0,5h - d')b.h.\sigma_{bc}$:

$\Rightarrow A'_s = \dfrac{M_{AS} - b\,h\,\sigma_{bc}\left(d - \frac{h}{2}\right)}{\sigma_s(d-d')}$

$A_s = \dfrac{N_u - b\,h\,\sigma_{bc}}{\sigma_s} - A'_s$

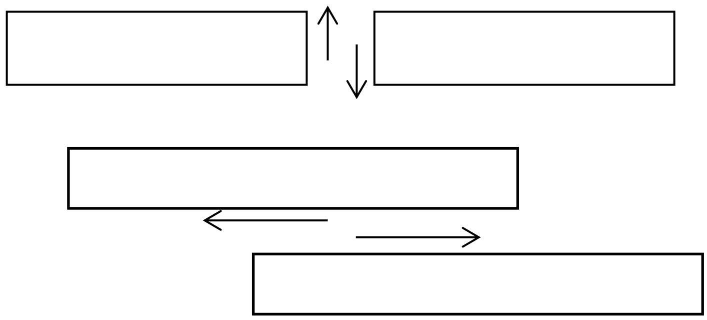
CHAPITRE 04 : L'EFFORT TRANCHANT

1- Généralités

Dans une poutre en béton armé, l'effort tranchant est équilibré par les armatures transversales.

2- Contrainte tangentielle conventionnelle

L'effort tranchant fait glisser les plans les uns par rapport aux autres, les plans perpendiculaires et les plans parallèles.



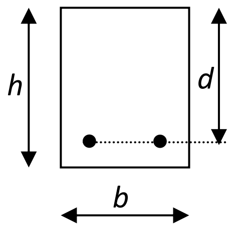
La contrainte tangente (contrainte de cisaillement) dans la section en béton armé ou se produit l'effort tranchant sera donnée par l'équation suivante :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b.d}$$

Avec : τ_u: La contrainte tangente.

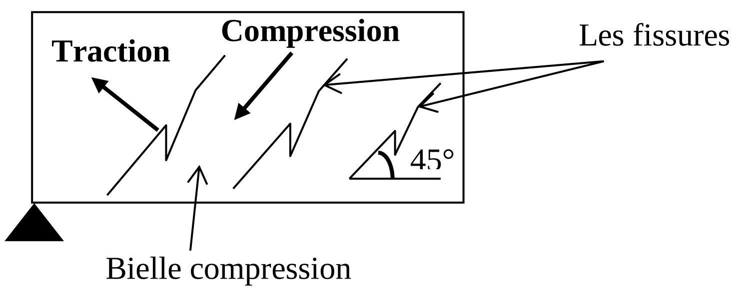
V_u : L'effort tranchant.

b : La largeur de la section.

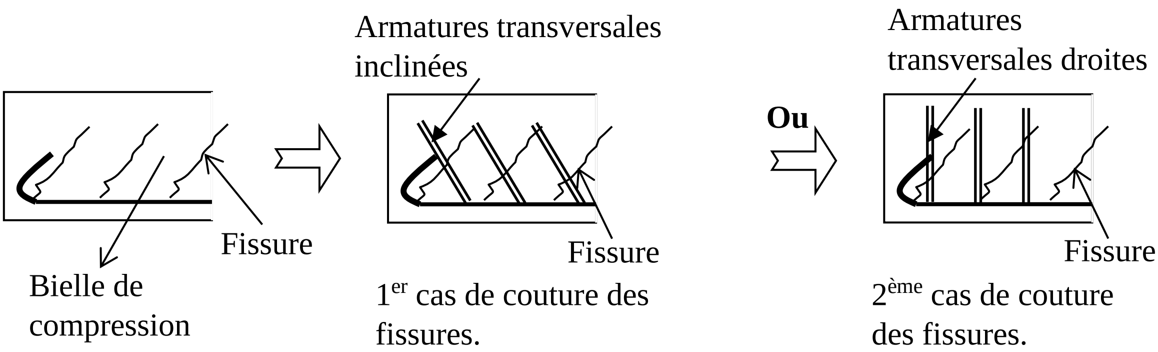


d : La distance entre la fibre supérieure et les armatures inférieures.

3- Comportement des poutres sous l'action de l'effort tranchant



Le béton par sa faible résistance à la traction ne peut pas équilibrer les contraintes de traction engendrées par l'effort tranchant. Il est donc nécessaire de renforcer cette insuffisance par des armatures qui vont coudre ces fissures, leurs dispositions logiques seront :



Puisque leur efficacité reste la même et pour faciliter l'exécution, les armatures seront disposées suivant le 2ème cas. On calcul la section des armatures pour ferrailler l'effort tranchant comme suit :

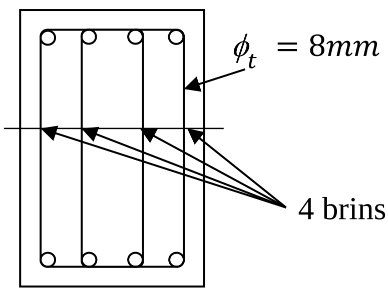
$$A_t = n \,.\, \phi_t$$

A_t : La quantité d'armatures transversales.

n : Le nombre de brin.

ϕ_t : Le diamètre du brin.

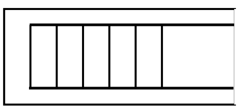
Exemple :



Nous avons donc : $\boldsymbol{A_t = 4\phi 8}$

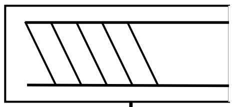
4- Justification des poutres sous sollicitations tangentes

La contrainte tangentielle τ_u doit satisfaire les conditions suivantes :

- Cas d'armatures droites : 

$\bar{\tau_u} \leq min\left[\frac{0{,}2\ .\ f_{c28}}{\gamma_b}\ ; 5\ MPa\right]$ Pour une fissuration non préjudiciable.

$\bar{\tau_u} \leq min\left[\frac{0{,}15\ .\ f_{c28}}{\gamma_b}\ ; 4\ MPa\right]$ Pour une fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.

- Cas d'armatures inclinées : 

$$\bar{\tau_u} \leq min\left[\frac{0{,}27\ .\ f_{c28}}{\gamma_b}\ ; 7\ MPa\right]$$

Si : $\tau_u > \bar{\tau_u}$ $\Rightarrow$ On doit augmenter les dimensions de la section.

Si : $\tau_u \leq \bar{\tau_u}$ $\Rightarrow$ On calcule le diamètre des armatures transversales ϕ_t :

$$\phi_t \leq min\left[\frac{h}{35}; \phi_{l\ min}; \frac{b}{10}\right]$$

Le rapport de la section A_t sur l'espacement S_t des armatures transversales doit vérifier l'inégalité suivante :

$$\frac{A_t}{b\ .S_t} \geq \frac{\tau_u - 0{,}3.f'_{tj}.k}{0{,}9\frac{f_e}{\gamma_s}(sin\ \alpha + \cos\alpha)}$$

- Si on utilise des cadres droits (α =90°) ⇒ sin α + cos α = 1.

- $f'_{tj} = \min(f_{tj}\ ; 3{,}3\ MPa)$

- k = 1 : dans le cas général.

- k = 0 : si la fissuration est très préjudiciable ou s'il y'a reprise de bétonnage.

A partir de l'équation précédente on trouve l'espacement S_t :

$$S_t \leq \frac{0{,}9.A_t.f_e(sin\ \alpha + \cos\alpha)}{\gamma_s\ .b\ (\tau_u - 0{,}3.f'_{tj}.k)}$$

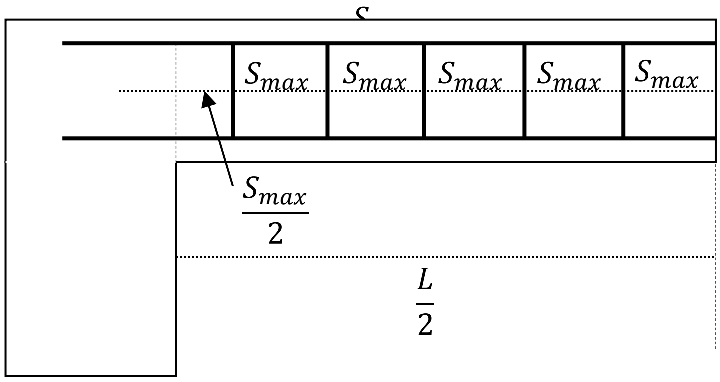
5- Répartitions des cadres le long de la poutre

Les armatures transversales sont généralement constituées par des barres de 6 à 12 *mm* de diamètre entourant les armatures supérieures et inférieures. Pour faire la répartition des cadres on doit calculer l'espacement maximal S_{max} :

$$S_{max} \leq min\left[0{,}9d\ ; 400mm\ ; \frac{A_t.f_e}{0{,}4\ .b}\right]$$

Si : $S_t > S_{max}$:

- Placer le premier cours d'armature transversale à une distance du nu d'appui égale à $\frac{S_{max}}{2}$.
- Disposer les autres cours d'armatures à une distance constante égale à S_{max}.



Si : $S_t \leq S_{max}$:

- Placer le premier cours d'armature transversale à une distance du nu d'appui égale à $\frac{S_t}{2}$.
- Effectuer la répartition des cours en appliquant la règle de CAQUOT définie par :

7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 13 – 16 – 20 – 25 – 30 – 35 - 40 cm.

- Répéter chacune des valeurs de la progression autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi-portée de la poutre.