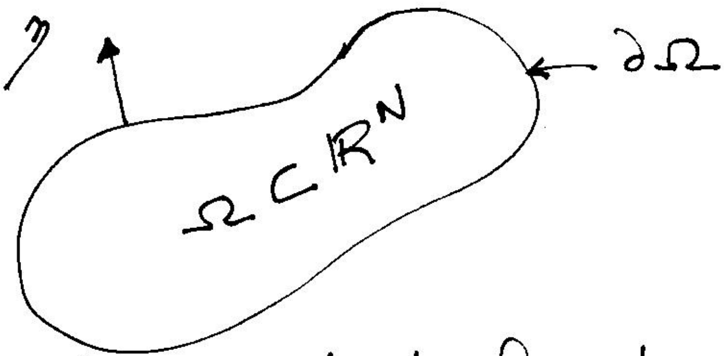
Commentaires sur l'exercice 1 de la série II

Soient u et v dans $C^2(\overline{\Omega})$, alors la formule de Green dans le cadre général est

$$(FG) \ldots \int_{\Omega} u \,\Delta v \,dx = -\int_{\Omega} \nabla u \,\nabla v \,dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta}\,d\sigma$$

$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \nabla v . \eta$,

où . désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$



Parmi les conséquences de la formule (FG), on a

$$(FG1) \ldots \int_{\Omega} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma,$$

$d\sigma$: la mesure surfacique (mesure de Lebesgue) sur $\partial\Omega$.

Dans notre cas $u(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Ln}(|x|)$, $v(x) = \varphi(x)$ et $\Omega = B^c(0,\varepsilon)$. D'après la formule (FG1), on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B^c(0,\varepsilon)} \left(\mathrm{Ln}(|x|)\,\Delta\varphi(x) - \varphi(x)\,\Delta \mathrm{Ln}(|x|) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B^c(0,\varepsilon)} \left(\mathrm{Ln}(|x|) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \eta_\varepsilon} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \eta_\varepsilon} \left(\mathrm{Ln}(|x|) \right) \right) d\sigma_\varepsilon(x),$$

Or, on a démontré que $\Delta \mathrm{Ln}(|x|) = 0$. Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B^c(0,\varepsilon)} \mathrm{Ln}(|x|)\,\Delta\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B^c(0,\varepsilon)} \left(\mathrm{Ln}(|x|) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \eta_\varepsilon} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \eta_\varepsilon} \left(\mathrm{Ln}(|x|) \right) \right) d\sigma_\varepsilon(x)$$