CORRIGE TYPE

SERIE III

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation quasi-géostrophique (QG)

$$\begin{cases} \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta - \Delta\theta = 0 & (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2 \quad \ldots (1)\\ v=(v^1,v^2) = \left(-\partial_2(-\Delta)^{-1/2}\theta,\ \partial_1(-\Delta)^{-1/2}\theta\right) & \ldots (2)\\ \theta(0,x) = \theta_0(x) & \ldots (3)\end{cases}$$

PARTIE I.

(I.1) Nous allons vérifie que $\operatorname{div} v = 0$. Par définition, on a $\operatorname{div} v = \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2$, or l'équation 2 nous conduit à

$$\operatorname{div} v = \partial_1\left(-\partial_2(-\Delta)^{-1/2}\theta\right) + \partial_2\left(\partial_1(-\Delta)^{-1/2}\theta\right)$$

$$= -\partial_1\partial_2(-\Delta)^{-1/2}\theta + \partial_1\partial_2(-\Delta)^{-1/2}\theta = 0.$$

Pour $v\cdot\nabla\theta = \operatorname{div}(v\theta)$, on utilise la définition suivante $\operatorname{div}(v\theta) = \operatorname{div} v\,\theta + v\cdot\nabla\theta$, mais $\operatorname{div} v = 0$, donc $\operatorname{div}(v\theta) = v\cdot\nabla\theta$

(I.2) Nous allons montrer que $\partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ sont continus sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)$, $s\in\mathbb{R}$. C'est-à-dire, il existe $C>0$ telle que

$$\|\partial_j(-\Delta)^{-1/2}\theta\|_{\dot{H}^s} \leq C\|\theta\|_{\dot{H}^s}.$$

Par définition, on a :

$$\|\partial_j(-\Delta)^{-1/2}\theta\|^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}\,|\widehat{\partial_j(-\Delta)^{-1/2}\theta}(\xi)|^2\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}\left| i\,\xi_j/|\xi|\ \hat\theta(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}\,|\xi_j|^2/|\xi|^2\,|\hat\theta(\xi)|^2\,d\xi$$

$$(|\xi_j|^2 \leq |\xi|^2)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s}\,|\hat\theta(\xi)|^2\,d\xi = \|\theta\|^2_{\dot{H}^s}.$$

Enfin $\quad \|\partial_j(-\Delta)^{-1/2}\theta\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \|\theta\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)}$