(I.3) Nous allons montrer l'égalité d'énergie

$$\forall t \geq 0 \quad \|\theta(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2} d\tau = \|\theta_0\|^2_{L^2}$$

En multipliant l'équation (1) par θ et on intègre sur $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \theta \cdot \theta \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla\theta \, \theta \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta\theta \, \theta = 0$$

On traite chaque terme

* $$\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \theta \, \theta \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \partial_t \theta^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \theta^2(t,x) \, dx$$

* $$\int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla\theta \, \theta \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} v^j \partial_j \theta \, \theta \, dx \overset{\text{F. Green}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} v^j \partial_j \theta^2 \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \sum \partial_j v^j \theta^2 \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \cancelto{0}{\operatorname{div} v} \, \theta^2 \, dx = 0$$

* $$-\int_{\mathbb{R}^2} \Delta\theta \, \theta \, dx \overset{\text{F. Green}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\theta \cdot \nabla\theta \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\theta(t,x)|^2 \, dx$$

Mettre ensemble ces estimations, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \theta^2(t,x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\theta(t,x)|^2 \, dx = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

On intègre sur $[0,t]$, on arrive à

$$\|\theta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, d\tau = \|\theta_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

(I.4) vérifions que

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \theta^3(x) \, \Delta\theta(x) \, dx = 3 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\theta(x)|^2 \theta^2(x) \, dx$$

D'après la formule de Green, on trouve

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \theta^3 \Delta\theta(t,x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(\theta^3(t,x)) \, \nabla\theta(t,x) \, dx$$

$$= 3 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\theta(t,x) \, \theta^2(t,x) \, \nabla\theta(t,x) \, dx$$