$$-\int_{\mathbb{R}^3} \theta^3(t,x)\,\Delta\theta(t,x)\,dx = 3\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\theta(t,x)|^2\,\theta(t,x)\,dx$$

(I.5) En multipliant l'équation θ par θ^3, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t\theta\,\theta^3 dx + \int_{\mathbb{R}^2} v.\nabla\theta\,\theta^3 dx - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta\theta\,\theta^3 dx = 0$$

$$(*)\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t\theta\,\theta^3 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tfrac{1}{4}\,\partial_t\theta^4 dx = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \theta^4(t,x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\theta(t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)}.$$

$$(*)\int_{\mathbb{R}^2} v.\nabla\theta.\theta^3 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2} v^j\partial_j\theta.\theta^3 dx \overset{\text{F. Green}}{=} -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{2}\partial_j v^i\ \theta^4 dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \overset{0}{\overbrace{\operatorname{div} v}}.\theta^4(t,x)\,dx$$

$$= 0$$

$$(*)\quad -\int_{\mathbb{R}^2} \Delta\theta(t,x)\,\theta^3(t,x)\,dx \overset{\text{D'après I.4)}}{=} 3\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\theta(t,x)|^2\,\theta^2(t,x)\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla(\theta^2(t,x))\right)^2 dx$$

$$= 3/4\ \|\nabla(\theta^2)(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Mettre ensemble toutes les estimations pour obtenir

$$1/4\frac{d}{dt}\|\theta(t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} + \frac{3}{4}\|\nabla(\theta^2)(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0 \quad \forall t\geq 0$$

On intègre sur $[0,t]$, il en résulte

$$\|\theta(t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} + 3\int_0^t \|\nabla(\theta^2)(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,d\tau = \|\theta_0\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)}.$$

PARTIE II

Supposons que $\theta_0\in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2)$.

(II.1) $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2)$ est un espace de Hilbert car $s=\frac{1}{2}$. Mais la dimension $N=2$ $\left(0<s=1/2<\frac{N}{2}=\frac{2}{2}=1\right)$

L'exposant "p" pour lequel $\dot{H}^{1/2}\hookrightarrow L^p$ soit continue est donné par, $p=\dfrac{2N}{N-2s}=\dfrac{2\times 2}{2-2(1/2)}=\boxed{4}$. Donc

$$\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$$