SERIE I

Corrigé d'Exercice 4.

1/ Pour montrer que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, il suffit d'écrire u comme la somme de la basse fréquence et haute fréquence, c'est-à-dire

$$u \equiv \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{B(0,1)}\hat{u}) + \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{B^c(0,1)}\hat{u}),$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A

Le reste se fait comme dans le cours.

Pour prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}\,dx\,dy < \infty,$$

On procède par l'argument de densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ comme suit : supposons que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ c'est-à-dire $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et supp u est un compact dans $\mathbb{R}^N$. D'après le théorème des accroissements finis, on écrit

$$u(x+y) - u(x) = d_c u \cdot y \;;\; c = (1-\theta)$$

Il vient que ($d_c u$: la differentielle de u qui est bornée car $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$)

$$\iint_{\mathbb{R}^N\,\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-y+\mathrm{supp}\,u}\int_{\mathrm{supp}} \frac{|d_c u|\,|y|^2}{|y|^{N+2s}}\,dx\,dy$$

$$\leq C\int_{-y+\mathrm{supp}\,u}\int_{\mathrm{supp}\,u} \frac{dx\,dy}{|y|^{N+2s-2}} = C\int_{-y+\mathrm{supp}} dx \int_{\mathrm{supp}\,u} \frac{dy}{|y|^{N+2s-2}}$$

$$< \infty \iff N+2s-2 < N \iff s < 1$$

En dehors du compact $-y+\mathrm{supp}\,u \times \mathrm{supp}\,u$, les deux fonctions $|u(x)|^2/|x-y|^{N+2s}$ et $|u(y)|^2/|x-y|^{N+2s}$ sont intégrables

Le reste découle de la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ $\boxed{1}$