2/ On munit $\dot{H}^{s}(\mathbb{R}^N)$ par la norme $\tilde{\|}\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ définie par

$$\tilde{\|} u \|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}\,dx\,dy$$

Nous voulons démontrer que cette norme est équivalente à celle de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$, définie par $\|u\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$

D'après la question 1/, on applique le théorème de Fubini pour écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N+2s}} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)-u(x)|^2 dx \quad \cdots (*)$$

En utilisant l'identité de Plancherel-Parseval, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)-u(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(u(\xi+y)-u(\xi))|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle y,\xi\rangle}\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |e^{i\langle y,\xi\rangle} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
|e^{i\langle y,\xi\rangle} - 1|^2 &= (\cos(\langle y,\xi\rangle) - 1)^2 + \sin^2(\langle y,\xi\rangle) \\
&= 2 - 2\cos(\langle y,\xi\rangle) = 4\sin^2(\langle y,\xi\rangle/2)
\end{aligned}$$

Nous substituons les deux dernières estimations dans $(*)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}\,dx\,dy &= 4\int_{\mathbb{R}^N} 1/|y|^{N+2s} \int_{\mathbb{R}^N} \sin^2(\langle y,\xi\rangle/2)\,|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\,dy \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} 4\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sin^2(\langle y,\xi\rangle/2)}{|y|^{N+2s}}\,dy\,d\xi \\
&= 4\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sin^2(1/2\,|y||\xi|\cos\alpha)}{|y|^{N+2s}}\,dy\,d\xi,
\end{aligned}$$

où α est l'angle entre y et ξ.

Par passage aux coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$, en posant $y = r\omega$; $\omega \in S_{N-1}$ ($|\omega| = 1$) et $dy = r^{N-1}\,dr\,d\sigma(\alpha)$. Alors