2/ Nous allons montrer que $-\Delta u = f$ admet dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ une solution de type $u \equiv E_N * f$. On applique le laplacien, on obtient $-\Delta u = (\Delta E_N) * f$ / $\Delta E_N = -\delta_0$. Ainsi, on aura

$$-\Delta u \equiv \delta_0 * f \equiv f \quad \boxtimes$$

3/ Une matrice orthogonale R est une matrice carrée, où $R^t R = R R^t = \mathbb{I}_N$, avec R^t est la transposée de R, donc, on déduit dans ce cas $R^t = R^{-1}$. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$,

on a :

$$\Delta(f \circ R)(x) = (\Delta f)(Rx)$$

où, on a utilisé le fait que Δ est commute avec R, (laissez aux étudiants), donc, on déduit que :

$$\Delta f \circ R \equiv (\Delta f) \circ R.$$

4/ Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, alors pour $j \in \{1, .., N\}$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(|x|) = \frac{\partial}{\partial x_j}(|x|)\Big(f' \Big)(|x|)$$
$$= \frac{x_j}{|x|}\Big(f' \Big)(|x|)$$

On applique encore une fois $\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour obtenir

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(|x|) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j \cdot |x|^{-1})\Big(f' \Big)(|x|) + \frac{x_j}{|x|}\frac{x_j}{|x|}\Big(f'' \Big)(|x|)$$
$$= \left(|x|^{-1} - x_j^2/|x|^3\right) f'(|x|) + \frac{x_j^2}{|x|^2} f''(|x|)$$

On fait la sommation sur j,

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(|x|) = \left(N|x|^{-1} - |x|^2/|x|^3\right) f'(|x|) + f''(|x|)$$
$$= \left(N|x|^{-1} - 1/|x|\right) f'(|x|) + f''(|x|)$$
$$= f''(|x|) + \frac{(N-1)}{|x|} f'(|x|) \quad \boxtimes$$