(1) — **Proposition 2.1.1.** *la fonction N définie par :*

$$N(x) = \frac{1}{2} \ln |x|$$

est dans L^1_{loc} ($\mathbb{R}$) et est une solution fondamentale du Laplacien i.e. vérifie $\Delta N = \delta_0$.

Démonstration. Comme N est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc N est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ il suffit de montre que N est intégrable au voisinage de 0.
En effet
Soit B(0,1) une boule ouvert de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{B(0,1)} N(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,1)} \ln |x| dx$$ 1

on passe à la changement de coordonné polaire où :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} N(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln r \cdot r dr d\theta \\
&= \int_0^1 r \ln r dr \\
&= \left[\frac{1}{2}r^2 \ln r - \frac{1}{4}r^2\right]_{\lim_{r\to 0}}^{r=1} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{B(0,\varepsilon)} N(x)dx < +\infty$$

D'où N est bien définie dans L^1_{loc} $(\mathbb{R})$, De plus on vérifie facilement que si $x \neq 0$,ΔN=0 :

$$\begin{aligned}
\Delta N(x) &= \partial_1^2 N(x) + \partial_2^2 N(x) \\
&= \partial_1(\partial_1 N(x)) + \partial_2(\partial_2 N(x)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\partial_1\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) + \partial_2\left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.alors :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta N, \varphi \rangle &= \langle N, \Delta\varphi \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(0,\varepsilon)^c} \ln(|x|)\Delta\varphi(x)dx - 0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(0,\varepsilon)^c} \ln(|x|)\Delta\varphi(x)dx - \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Delta\ln(|x|)\varphi(x)dx\right)
\end{aligned}$$

on applique formule de Green sur les deux terme on trouve :

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta N, \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(- \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla \ln(|x|) \nabla \varphi(x) dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \ln(|x|) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon(x) \right) \\
&+ \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(+ \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla \ln(|x|) \nabla \varphi(x) dx - \int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \varphi(x) \frac{\partial \ln(|x|)}{\partial n_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon(x) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \ln(|x|) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon(x) - \int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \varphi(x) \frac{\partial \ln(|x|)}{\partial n_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon(x) \right)
\end{aligned}
$$

Or si on note σ la mesure surfacique sur S(0,1),on a :

$$
\int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \ln(|x|) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon(x) = -\varepsilon \ln(\varepsilon) \int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \nabla \varphi(\varepsilon y) \cdot y d\sigma(y).
$$

Comme $\nabla \varphi$ est bornée,cette intégrale converge vers 0 .Pour la deuxième intégrale , on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \varphi(x) \frac{\partial \ln(|x|)}{\partial n_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \varphi(\varepsilon x) \frac{x}{|x|^2} \cdot x d\sigma(x) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,\varepsilon)^c} \varphi(\varepsilon x) d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

et par convergence dominée ,cette intégrale converge vers $-\varphi(0)$. 3