SERIE III

Exercice 2.

(2) Nous allons que l'équation $\Delta u = f$ admet une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de type $u = E_N * f$. On applique l'opérateur Δ sur l'expression $u = E_N * f$ pour obtenir

$$\Delta u = (\Delta E_N) * f$$

Or, $\Delta E_N = \delta_0$ alors $\Delta u = \delta_0 * f$

Annexe : Soit $(T, \varphi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \cup \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \times C^\infty(\mathbb{R}^N)$ le produit de convolution de T et de φ est la fct donnée par

$$T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T, \tau_x \varphi \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Dans notre cas $T = \delta_0$, où $\operatorname{supp} T = \{0\}$, donc $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}N)$ l'ensemble des distributions à support compact.

Donc

$$\Delta u(x) = \delta_0 * f(x) = \langle \delta_0, f(x - \cdot) \rangle$$
$$= f(x-0) = f(x). \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

On deduit que $u = E_N * f$ est une solution de $\Delta u = f$.

(3) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Nous allons montrer que

$$\Delta(f(|x|)) = f''(|x|) + \frac{(N-1)}{|x|} f'(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Par définition

$$\Delta(f(|x|)) = \sum_{j=1}^N \partial_j^2 (f(|x|)) = \sum_{j=1}^N \partial_j (\partial_j (f(|x|)))$$

fct. composée

$$= \sum_{j=1}^N \partial_j (f'(|x|) \, \partial_j(|x|))$$

Mais, $\partial_j(|x|) = \partial_j((x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2})$

$$= \frac{1}{2} 2x_j (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2 - 1}$$

$$= x_j\,(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-1/2}$$

Il en résulte

$$\Delta(f(|x|)) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j \left[f'(|x|)\, x_j \cdot (x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-1/2} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \Big[f''(|x|)\, \partial_j(|x|)\, x_j\, (x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$f'(|x|)\,\partial_j\left(x_j\,(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-1/2}\right)\Big]$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \Big[f''(|x|)\, x_j\,(x_1^2+\cdots+x_N)^{-1/2}\, x_j\,(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$f'(|x|)\left((x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-\frac{1}{2}} - x_j\,\tfrac{1}{2}x_j\,(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-3/2}\right)\Big]$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \Big[f''(|x|)\, x_j^2\,(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-1} + \Big((x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-1/2}$$

$$- x_j^2\,(x_1^2+\cdots+x_N^2)^{-3/2}\Big) f'(|x|)\Big]$$

$$= f''(|x|)\sum_{j=1}^{N} x_j^2\, |x|^{-1} - \sum_{j=1}^{N} f'(|x|)\left[|x|^{-1} - x_j^2\,|x|^{-3}\right]$$

$$= f''(|x|)\,|x|^2|x|^{-2} - N f'(|x|)\,|x|^{-1} + |x|^2|x|^{-3}$$

$$= f''(|x|)\,|x|^0 - N f'(|x|)\,|x|^{-1} + |x|^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\setminus\{0\}$$

$$= f''(|x|) + \frac{(1-N)}{|x|} f'(|x|) \quad \text{et non pas}$$

$$f''(|x|) + \frac{(N-1)}{|x|} f'(|x|)$$