Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Géométrie des courbes et surfaces
Mr. Zerguine Mohamed
2019-2020

CORRIGÉ DE LA FEUILLE D'EXERCICES (I)
2ÈME ANNÉE LMD

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition, l'intervalle d'étude et représenter graphiquement ces symétries des courbes paramétrées de composantes :

(1.i) $x : t \mapsto x(t) = \sin(2t)\cos^2 t, \quad y :\mapsto y(t) = \cos(2t)\sin^2 t.$

• Il est clair que les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, donc on va étudier la périodicité. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t+\pi) = \sin(2(t+\pi))\cos^2(t+\pi) = \sin(2(t+\pi))(-\cos(t))(-\cos(t)) = \sin(2t)\cos^2(t) = x(t) \\ y(t+\pi) = \cos(2(t+\pi))\sin^2(t+\pi) = \cos(2(t+\pi))(-\sin(t))(-\sin(t)) = \cos(2t)\sin^2(t) = y(t). \end{cases}$$

On déduit que x et y sont périodiques, de période π, donc notre étude est faite sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ensuite, pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\begin{cases} x(-t) = \sin(2(-t))\cos^2(-t) = -\sin(2t)(\cos(t))(\cos(t)) = -\sin(2t)\cos^2(t) = -x(t) \\ y(-t) = \cos(2(-t))\sin^2(-t) = \cos(2t)(-\sin(t))(-\sin(t)) = \cos(2t)\sin^2(t) = y(t), \end{cases}$$

est le symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy). Par ailleurs, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^2(\frac{\pi}{2} - t) = (-\sin(-t))(-\sin(-t)) = \sin^2(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = \sin^2(\frac{\pi}{2} - t) = (-\cos(-t))(-\cos(-t)) = \cos^2(t) = x(t), \end{cases}$$

est le symétrie orthogonale de $\gamma(t)$ par rapport à la droite $y = x$, il suffit donc de tracer le support pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(1.ii) $x : t \mapsto x(t) = \cos^2 t, \quad y :\mapsto y(t) = \sin^2 t$

• Il est clair de vérifier que x et y sont définies sur tout $\mathbb{R}$. D'autre coté,

$$\begin{cases} x(t+\pi) = \cos^2(t+\pi) = (-\cos(t))(-\cos(t)) = \cos^2(t) = x(t) \\ y(t+\pi) = \sin^2(t+\pi) = (-\sin(t))(-\sin(t)) = \sin^2(t) = y(t), \end{cases}$$

ainsi on obtient toute la courbe γ si t décrit un intervalle I de longueur π à l'instar $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ensuite

$$\begin{cases} x(t+\pi) = \cos^3(t+\pi) = -\cos^3(t) = -x(t) \\ y(t+\pi) = \sin^3(t+\pi) = -\sin^3(t) = -y(t), \end{cases}$$

est le sysmétrie de $\gamma(t)$ par rapport à l'origine $\vec{O} = (0,0)$. On a ensuite

$$\begin{cases} x(-t) = \cos^3(-t) = \cos^3(t) = x(t) \\ y(-t) = \sin^3(-t) = -\sin^3(t) = -y(t), \end{cases}$$

est le symétrie orthogonale de $\gamma(t)$ par rapport à l'axe (Ox). On trace donc le support de la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour finir, soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(\frac{\pi}{2} - t) = \sin^3(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(t) = x(t), \end{cases}$$

est le symétrie de $\gamma(t)$ par rapport à la droite $y = x$, il suffit donc de tracer le support pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(1.iii) $x : t \mapsto x(t) = \cos^3 t, \quad y :\mapsto y(t) = \sin^3 t.$

• Il est clair de vérifier que x et y sont définies sur tout $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = \cos^3(t+2\pi) = \cos^3(t) = x(t) \\ y(t+2\pi) = \sin^3(t+2\pi) = \sin^3(t) = y(t), \end{cases}$$

ainsi on obtient toute la courbe γ si t décrit un intervalle I de longueur 2π. Puis,

$$\begin{cases} x(t+\pi) = \cos^3(t+\pi) = -\cos^3(t) = -x(t) \\ y(t+\pi) = \sin^3(t+\pi) = -\sin^3(t) = -y(t), \end{cases}$$

est le sysmétrie de $\gamma(t)$ par rapport à l'origine =(0,0). On a ensuite

$$\begin{cases} x(-t) = \cos^3(-t) = \cos^3(t) = x(t) \\ y(-t) = \sin^3(-t) = -\sin^3(t) = -y(t), \end{cases}$$

est le symétrie orthogonale de $\gamma(t)$ par rapport à l'axe (Ox). On trace donc le support de la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour finir, soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(\frac{\pi}{2} - t) = \sin^3(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(t) = x(t), \end{cases}$$

est le symétrie orthogonale de $\gamma(t)$ par rapport à la droite $y = x$, il suffit donc de tracer le support pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(1.iv) $x : t \mapsto x(t) = t^2 + 1, \quad y :\mapsto y(t) = t^2 + t + 1.$

• Comme la courbe γ n'est pas périodique et n'admet pas des symétries, alors l'intervalle d'étude est tout $\mathbb{R}$.

(1.v) $x : t \mapsto x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y :\mapsto y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}.$

• Les fonctions x et y sont définies sur tout $\mathbb{R}$. D'autre part,

$$\begin{cases} x(-t) = \frac{-t}{1+(-t)^4} = -x(t) \\ y(-t) = \frac{(-t)^3}{1+(-t)^4} = -y(t), \end{cases}$$

est la symétrie centrale de l'origine, donc on trace le support sur $[0, +\infty[$. De plus

$$\begin{cases} x(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\frac{t^4}{1+t^4} = \frac{t^3}{1+t^4} = y(t) \\ y(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t^3}\frac{t^4}{1+t^4} = \frac{t}{1+t^4} = x(t), \end{cases}$$

est le symétrie orthogonale de $\gamma(t)$ par rapport à la droite $y = x$, il suffit donc de tracer le support sur $[0, 1]$, car

$$h([0,1]) = \left\{\frac{1}{t} : t \in]0,1]\right\} = [1, +\infty[, \quad h(t) = \frac{1}{t}.$$

(vi) $x : t \mapsto x(t) = t\ln t, \quad y :\mapsto y(t) = \frac{\ln t}{t}.$

• Les domaines de définition de x et y sont $]0, +\infty[$. D'autre part,

$$\begin{cases} x(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} = -y(t) \\ y(\frac{1}{t}) = \frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = -t\ln t = -x(t), \end{cases}$$

est le symétrie par rapport à la droite $y = -x$. D'autre part, en posant $h(t) = \frac{1}{t}$ on a

$$h(]0,1]) = \left\{\frac{1}{t} : t \in]0,1]\right\} = [1, +\infty[,$$

par ailleurs, il suffit de tracer le support de la courbe γ sur $]0, 1]$.

Exercice 2. Trouver une équation cartésienne de la forme $F(x,y) = 0$, où est F est une fonction à déterminer des courbes paramétrées de composantes

(2.i) $x :\mapsto x(t) = t^2, \quad y(t) = -t^2.$

• Il est clair de vérifier que $x(t) + y(t) = 0$, alors dans ce cas, on déduit que $F(x,y) = x + y$

(2.ii) $x :\mapsto x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3.$

• On voit que $x^3(t) - y^2(t) = 0$, donc $F(x,y) = x^3 - y^2$.

(2.iii) $x :\mapsto x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}.$

• Exercice laisser aux étudiants.

(2.iv) $x :\mapsto x(t) = \frac{t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}.$

• On voit que $x^3(t) = \frac{t^3}{(1+t^3)^3}$, $y^3(t) = \frac{t^6}{(1+t^3)^3}$ et $x(t)y(t) = \frac{t^3}{(1+t^3)^2}$. Par ailleurs,

$$x^3 + y^3 - xy = 0,$$

est l'équation cartésienne associe à cette courbe. De plus, $F(x,y) = x^3 + y^3 - xy$

Exercice 3.

(3.1) Considérons la courbe d'équation

$$y = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}.$$

(3.1.i) Donner une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la courbe précédente.

• Nous signalons que le graphe d'une fonction f est toujours est une courbe, en posant $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$ pour $t \in I \subset \mathbb{R}$. Pour notre cas, on a

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{-t^2 - 3t + 4}. \end{cases}$$

(3.1.ii) Précisant le domaine de variation du paramètre t.

• Pour déterminer le domaine de variation de t, ssi $-t^2 - 3t + 4 \geq 0$. Pour ce faire, on va calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 25 > 0$, donc le polynôme admet deux racines, $t_1 = 1$ et $t_2 = -4$, donc on déduit que le domaine de variation est $[-4, 1]$

(3.2) Montrer que le support de la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + 3 \\ y(t) = \sin t \qquad \text{si } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ne peut pas être décrit par une équation de la forme $y = f(x)$.

• Les équations paramétrées précédentes décritent un cercle de centre $(3, 0)$ et de rayon 1. Comme la valeur de $x = 3$ correspond $y = \mp\frac{\pi}{2}$, donc on ne peut pas lui associe une équation de la forme $y = f(x)$. Plus précisèment, f n'est pas une application.

(3.3) On considère la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t - 2 \\ y(t) = \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4 \quad \text{si } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(3.3.i) Montrer que le support la courbe paramétrée précédente est le graphe d'une fonction f que l'on précisera.

• Vu que $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = -x(t) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4 = (-x(t) - 1)^2 + 4(-x(t) - 1) + 4 \\ &= x^2(t) - 2x(t) + 1 = (x(t) - 1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi les points (x, y) de la courbe vérifiant l'équation $y = f(x)$, avec $f(x) = (x - 1)^2$.

(3.3.ii) Déterminer son domaine de définition.

• On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos t \in [-1, 1]$, alors $\cos^2 t \in [0, 1]$, par conséquent $x(t) = \cos^2 t - 2 \in [-2, -1]$. Finalement

$$(x, y) \in \gamma \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x(t) = \cos^2 - 2 \\ y(t) = \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4. \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-2, -1] \\ y = (x - 1)^2. \end{cases}$$

Exercice 4. On considère la courbe paramétrée γ de composantes :

$$\begin{cases} x(t) = (t - 1)^2 \\ y(t) = (t + 1)^2 \quad \text{si } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(3.i) Déterminer les points réguliers de la courbe γ.

• On vérifie aisèment que les fonctions x et y sont dérivables et

$$\begin{cases} x'(t) = 2(t - 1) \\ y'(t) = 2(t + 1) \quad \text{si } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, on déduit $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On déduit que tous les points de γ sont réguliers.

(3.ii) Montrer que γ admet une tangente aux points de paramètres $t = -1$, $t = 0$ et $t = 1$.

• Pour $t = -1$, on a $(x'(-1), y'(-1)) = (-4, 0) \neq (0, 0)$. De même pour $t = 0$, on a $(x'(0), y'(0)) = (-2, 2) \neq (0, 0)$. Enfin, pour $t = 1$, on a $(x'(1), y'(1)) = (0, 4) \neq (0, 0)$. On déduit que γ admet des tangentes aux paramètres $t = -1$, $t = 0$ et $t = 1$.

(3.iii) Déterminer leurs équations cartésiennes.

• Pour $t=-1$, on a $\gamma(-1)=(4,0)$ et l'équation de la tengante est donnée par la formule $(x-x(-1))y'(-1)-(y-y(-1))x'(-1)=0$ [1]. Par un calcul élémentaire, on obtient $y=0$ la droite d'abscisse.
• Pour $t=0$, on a $\gamma(0)=(1,1)$ et l'équation de la tengante est donnée par la formule $(x-x(0))y'(0)-(y-y(0))x'(0)=0$. Par un calcul élémentaire, on obtient $y=2-x$.
• De même pour $t=1$, on a $\gamma(1)=(0,4)$ et l'équation de la tengante est donnée par la formule $(x-x(1))y'(1)-(y-y(1))x'(1)=0$. Un calcul simple nous donne $x=0$.

(3.3) Est ce que la courbe γ admet des points multiples ?

• Vu que tous les points de la courbe γ sont réguliers, donc on en déduit que la coube n'admet pas des points multiples.

Remarque. Cette série d'exercices fait correspondre à une série de cours déjà réalisé.

1. Notons que l'équation d'une tangente en un point régulier est donnée dans le cadre général par : $\det\begin{pmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0) \\ y-y(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix}=0$