Chapitre 1

Courbes planes paramétrées

1.1. Tangente à une courbe plane

Ce paragraphe est didié à l'étude de la tangente à γ en un point donné et la position de γ par rapport à cette tangente. Rappelons que nous avons déjà fait cette étude dans le cas d'un point régulier.

1.1.1. Tangente en un point singulier. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane avec I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$. Pour $t \in I$, soit $\vec{M}(t) = (x(t), y(t))$ un point de la courbe γ.

DÉFINITION 1.1.1. *Supposons que la courbe γ est dérivable. Soit $t_0 \in I$, on dit que le point $\vec{M}(t_0)$ est singulier ou stationnaire ssi $\frac{d}{dt}\vec{M}(t_0) = (0,0)$.*

REMARQUE 1.1.2. *On dit souvent que le point $\gamma(t_0)$ ou $M(t_0)$ est régulier ou singulier au lieu de parler du point du paramètre t_0. Cette terminologie est là encore, ambigue mais utilisée. Physiquement, un point stationnaire correspond à un point à vitesse nulle, ou point d'arrêt.*

Exemple 1. Déterminer les points singuliers de la courbe plane $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = (3t^2, 2t^3)$. Posons $x(t) = 3t^2$ et $y(t) = 2t^3$, il est clair de vérifier que x et y sont des fonctions dérivables sur $I = \mathbb{R}$ et que $\frac{d}{dt}\vec{M}(t) = (6t, 6t^2)$ avec $\vec{M}(t) \in \gamma$. De plus, si $\frac{d}{dt}\vec{M}(t) = (0,0)$ alors, on obtient que $t = 0$, donc $\vec{M}(0) = (0,0)$ est le seul point singulier de la courbe.

Exemple 2. Considérons la courbe plane γ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ de composantes :

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{2}{t^2}(t-1)(t^2+t+1), \quad \frac{d}{dt}y(t) = \frac{2}{t^3}(t^2+1)(t-1)(t+1).$$

Par conséquent $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}y(t) = 0$ si et seulement si $t = 1$, donc $\vec{M}(1) = (3,2)$ est le seul point singulier de γ.

DÉFINITION 1.1.3. *Soit $\vec{M}(t_0)$ un point singulier de γ, avec $t_0 \in I$. On étudie la limite du rapport $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$, lorsque t tend vers t_0.*

(1) *Si cette limite existe, notée l, la tangente en $M(t_0)$ existe et a pour coefficient directeur l.*

(2) *Si cette limite existe, mais est infinie, la tangente en $M(t_0)$ existe*

Exemple 3. Considérons la courbe plane $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = (3t^2, 2t^3)$. Trouver l'équation de la tangente en $\vec{M}(0)$. On a déjà vu que $M(0) = (0,0)$ est un point singulier de la courbe en question, car $\frac{d}{dt}\vec{M}(0) = (0,0)$. Donc, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t^3}{3t^2} = \frac{2}{3}t \to 0, \quad t \to 0.$$

On déduit que la tangente en $M(0)$ est l'axe des abscisses $y = 0$.

REMARQUE 1.1.4. *Lorsque $\vec{M}(t_0)$ est un point singulier de la courbe γ, c'est à dire $\left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right) = (0,0)$, on fait intervenir les dérivées d'ordres supérieures dans le sens suivant :*

- *Si $\left((\frac{d}{dt}x(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0)\right) = (0,0)$ et $(\frac{d^2}{dt^2}x(t_0), \frac{d^2}{dt^2}y(t_0)) \neq (0,0)$ est le vecteur dérivé de la tangente (T) au point singulier.*
- *Si $\left((\frac{d}{dt}x(t_0), \frac{d}{dt}y(t_0)\right) = \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t_0), \frac{d^2}{dt^2}y(t_0)\right) = (0,0)$ et $\left(\frac{d^3}{dt^3}x(t_0), \frac{d^3}{dt^3}y(t_0)\right) \neq (0,0)$, dans ce cas le vecteur dérivé de la tangente (T) est $\left(\frac{d^3}{dt^3}x(t_0), \frac{d^3}{dt^3}y(t_0)\right)$.*

D'après la remarque ci-dessus, on se ramène à un développement limité de la courbe γ au voisinage du paramètre $t_0 \in I$. Pour ce faire, on suppose toujours que $\vec{M}(t_0)$ est un point singulier et que γ est de classe C^n sur I on écrit :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)}{2!}\gamma^{(2)}(t_0) +, \dots, + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\gamma^{(n)}(t_0) + \mathscr{O}(t-t)^n,$$

avec la convention d'écriture $\frac{d^k}{dt^k}\gamma(\cdot) \equiv \gamma^{(k)}(\cdot)$, où $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $p = \min\left\{k \in \{1, \dots, n\} : \gamma^{(k)}(t_0) \neq (0,0)\right\}$. Si l'entier p existe, dans ce cas la tangente admet $\gamma^{(p)}(t_0)$ comme vecteur directeur.

1.1.2. Positions relatives de la courbe et de sa tangente. Dans cette partie, on va étudier l'allure de la courbe par rapport à sa tangente, en particulier aux points singuliers. Pour cette raison, nous rappelons que si $\vec{M}(t_0)$ est un point singulier et que γ est de classe C^n sur I, alors on a :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)}{2!}\gamma^{(2)}(t_0) +, \dots, + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\gamma^{(n)}(t_0) + \mathscr{O}(t-t)^n. \tag{1.1.1}$$

Alors, on a le résultat principal suivant :

THÉORÈME 1.1.5. *Soient $p = \min\left\{k \in \{1, \dots, n\} : \vec{\gamma}^{(k)}(t_0) \neq (0,0)\right\}$ et $q = \min\left\{k \in \{p+1\}, \dots n\} : \dim\,(\vec{\gamma}^{(p)}(t_0), \gamma^{(k)}(t_0)) = 2\right\}$. Alors au voisinage de t_0, la courbe prend l'une des formes suivantes :*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, supposons que $t_0 = 0$ et $\gamma(0) = (0,0)$. Donc, la formule (1.1.1) prend la forme :

$$\gamma(t) = \frac{t}{2!}\gamma^{(2)}(0) +, \dots, + \frac{t^n}{n!}\gamma^{(n)}(0) + \mathscr{O}(t^n).$$

D'après la définition de p, on écrit

$$\gamma(t) = t^p\vec{V}_p + \mathscr{O}(t^p), \quad \vec{V}_p = \frac{\gamma^{(p)}(0)}{p!}.$$

Le reste de la démonstration découle du lemme qui suit. $\square$

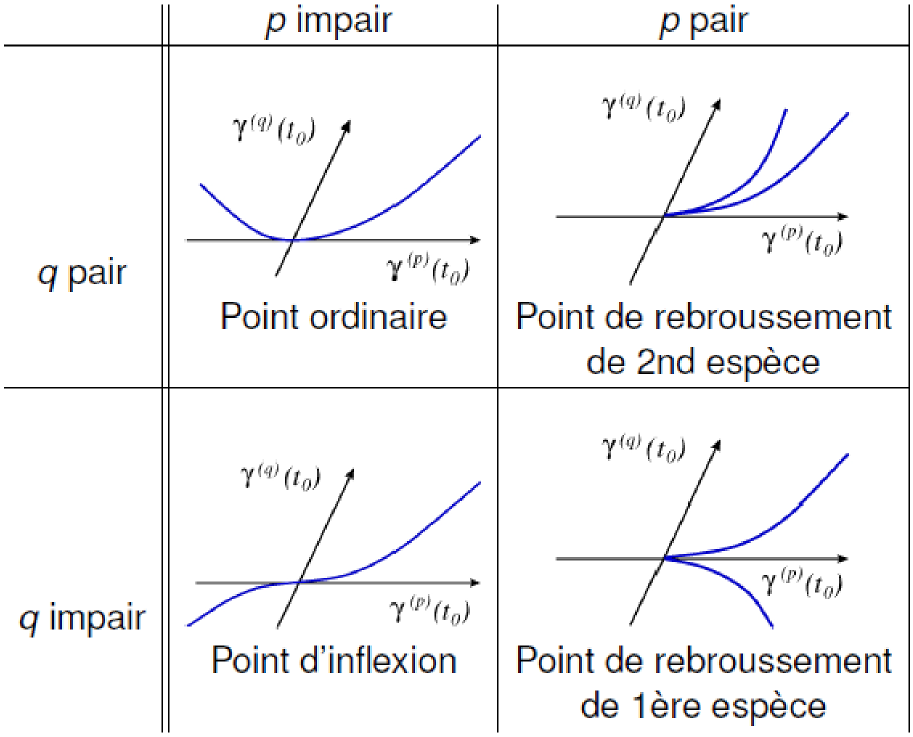

FIGURE 1.1: A boat.

LEMME 1.1.6. *Soit f une fonction continue en $0 \in I$ admet en 0 le développement limité suivant :*

$$f(t) = t^p + \mathcal{O}(t^p), \quad p \in \mathbb{N}^\star.$$

Il existe alors un intervalle ouvert J contenant 0 tel que
— *p pair : $t \in J$ et $t \neq 0 \Rightarrow f(t) > 0$.*
— *p impair :*

$$\begin{cases} t \in J, & t > 0 \Rightarrow f(t) > 0, \\ & t < 0 \Rightarrow f(t) < 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t^p}$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0 et se prolonge donc en une fonction continue en 0 qui prend la valeur 1 en 0. D'après un résult classique, il existe un intervalle ouvert J contenant 0 sur laquelle cette fonction est strictement positive. On en déduit aisèment le résultat. □

La position de la courbe par rapport à sa tangente dépend de la parité de p et q. Nous allons décrire les différentes situations possibles sur des exemples très simples, mais néanmoins typiques. On peut toujours se ramener au cas où $t_0 = 0$ par un changement de variable et au cas où M_0 est l'origine par un changement de repère : c'est dans cette situation que l'on se place pour étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Cas 1. — p **impair et** q **pair.** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = t^4 + t^5$ et $y(t) = t + t^3 + t^4$. Un dév. limité au voisinage $t_0 = 0$ nous donne

$$\gamma(t) = (t + t^3 - t^5)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (t^4 + t^5)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

La tangente en $\vec{O} = (0,0)$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. On pose $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de sorte que dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ (à vérifier), on a pour t assez petit

— pour $t > 0$, l'abscisse et l'ordonnée de $\gamma(t)$ ou $M(t)$ sont positives ;
— pour $t < 0$, l'abscisse est négative et l'ordonnée est positive.

La courbe reste du même côté de la tangente.

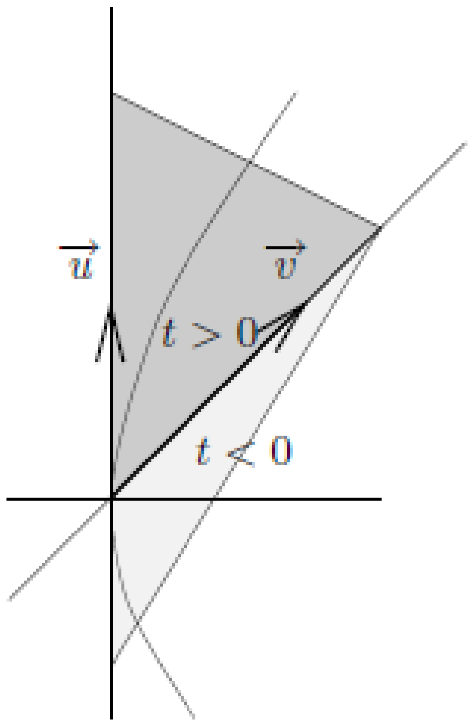

FIGURE 1.2:

Cas 2. — p **impair et** q **et impair.** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = t + t^3$ et $y(t) = 2t + 4t^3$. Un dév. limité au voisinage $t_0 = 0$ nous assure que

$$\gamma(t) = t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

La tangente en $\vec{O} = (0,0)$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ (à vérifier) on dont $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, on a si t assez petit

— pour $t > 0$, l'abscisse et l'ordonnée de $\gamma(t)$ ou $M(t)$ sont positives ;
— pour $t < 0$, l'abscisse et l'ordonnée sont négatives.

La courbe traverse la tangente. L'origine $\vec{O} = (0,0)$ est un point d'inflexion.

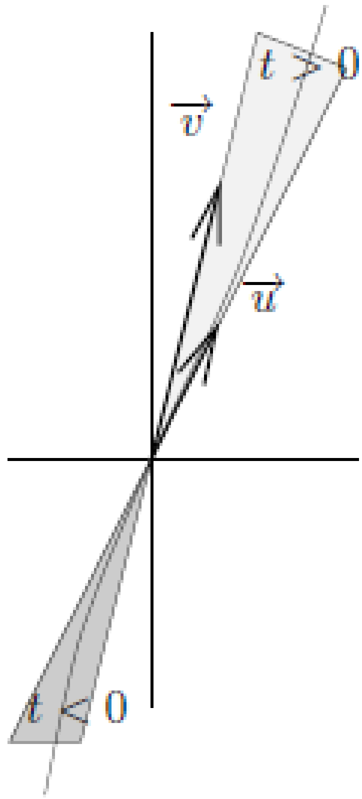

FIGURE 1.3:

Cas 3. — p **pair et** q **impair.** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = t^2 + 2t^3 + 2t^5$ et $y(t) = t^2 + 2t^3 - t^5$. Un dév. limité au voisinage $t_0 = 0$ nous donne

$$\gamma(t) = (t^2 + 2t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tangente en $\vec{O} = (0,0)$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1. \end{pmatrix}$

Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ (à vérifier) où $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a pour t assez petit

— pour $t > 0$, l'abscisse et l'ordonnée de l'abscisse et l'ordonnée de $\gamma(t)$ ou $M(t)$ sont positives ;

— pour $t < 0$, l'abscisse est positive et l'ordonnée est négative.

L'origine est un point de rebroussement de 1ère espace.

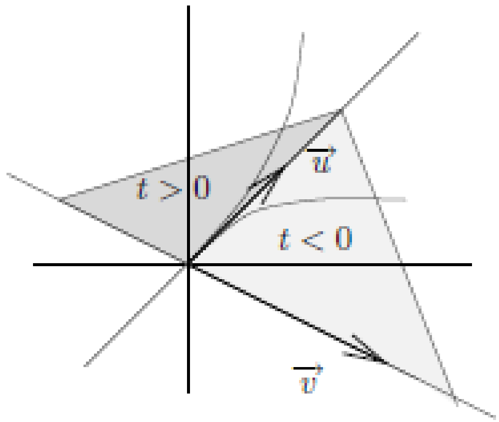

FIGURE 1.4:

Cas 4. — p **pair et** q **et pair.** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = t^2 + 2t^4 + t^5$ et $y(t) = t^2 - t^4$. Dans ce cas, on trouve

$$\gamma(t) = t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La tangente a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ (à vérifier) où $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a pour t assez petit

— pour $t > 0$, l'abscisse et l'ordonnée de $\gamma(t)$ ou $M(t)$ sont positives ;
— pour $t < 0$, l'abscisse et l'ordonnée sont encore positives.

L'origine est un point de rebroussement de 2ème espace.

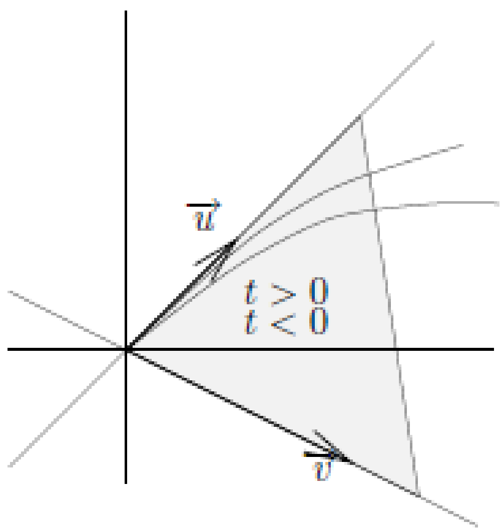

FIGURE 1.5:

REMARQUE 1.1.7. *Les vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$ figurent dans les shémas ci-dessus jouent le même rôle que $\vec{V}_p$ (sont identiques près d'une constante).*