Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2021-2022

DEVOIR À DOMICILE
2ÈME ANNÉE MASTER. OPTION : EDP

Considérons l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon = f, \\ v_{|t=0} = v_0, \end{cases} \tag{EC}$$

Il est tentant de penser que v_ε converge vers v, solution de l'équation $-\Delta v = f$ quand ε tend vers zéro.

(1) Prenons $N = 2$. Montrer que $E(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|)$ définit une distribution et que

$$-\Delta E = \delta_0.$$

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\big(1 + \ln(1 + |x|)\big) f(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Déduire que

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) f(y) dy$$

vérifie l'équation $-\Delta v = f$.

(3) Supposons que $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varepsilon, t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$v_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\varepsilon|x-y|^2/(4t)}}{(4\pi t/\varepsilon)^{N/2}} v_0(y) dy.$$

Montrer que v_ε converge vers 0 uniformément sur $[\delta,\infty) \star \mathbb{R}^N$ pour tout $\delta \in]0,\infty[$.

(4) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ à valeurs non négatives. Pour tout $\varepsilon, t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$w_\varepsilon(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\varepsilon|x-y|^2/(4(t-s))}}{(4\pi(t-s)/\varepsilon)^{N/2}} f(y) ds dy.$$

Montrer que, si $N > 2$, w_ε admet une limite finie quand $\varepsilon \to 0$, tandis que si la dimension $N = 1$ ou $N = 2$, alors $\lim_{\varepsilon \to 0} w_\varepsilon(t,x) = +\infty$.

(5) Donner une formule pour v_ε solution de (EC), en fonction de v_0 et f.

Indication : Utiliser le fait que $(\frac{\pi}{a})^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ est la trasformée de Fourier de $e^{-\frac{ax^2}{2}}$.

(6) Déduire que $v_\varepsilon \geq 0$ quand $v_0 \geq 0$ et $f \geq 0$.

(7) Prenons $N = 2$. Dans ce cas, on suppose que f ne dépend pas de la variable t, et que $v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\nabla v_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer alors que

$$\lim_{\varepsilon \to} \nabla v_\varepsilon(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} f(y) dy.$$

(8) Que peut-on conclure ?