Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Géométrie des courbes et surfaces
Mr. Zerguine Mohamed
2019-2020

EXAMEN DE RATTRAPAGE
2ÈME ANNÉE LMD
DURÉE : 3 HEURES

Exercice 1. Etudier le point singulier de la courbe

$$t \mapsto \gamma(t) : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

(1.1) grâce à des considérations de symétrie,
(1.2) en étudiant la position de la courbe par rapport à sa tangente,
(1.3) à l'aide des variations des fonctions x et y.

Exercice 2. Trouver les points singuliers de la courbe.

$$t \mapsto \gamma(t) : \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

Donner une équation cartésienne de la tangente au point courant (l'expression "au point courant" doit se lire : en un point quelconque de la courbe)

Exercice 3. Soit f une fonction de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{e}_r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\vec{e}_\theta(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Considérons la courbe plane paramétrée suivante :

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto f(\theta)\vec{e}_r(\theta),$$

c'est-à-dire $x(\theta) = f(\theta)\cos\theta$; $y(\theta) = f(\theta)\sin\theta$.

(1.1) Montrer que γ est une courbe paramétrée de classe C^2 et que $\gamma'(\theta) = f'(\theta)\vec{e}_r(\theta) + f(\theta)\vec{e}_\theta(\theta)$.
(1.2) En déduire que la courbe γ est régulière si et seulement si f et f' ne s'annulent pas simultanément.
(1.3) Définissons la courbure algébrique en un point régulier par $\kappa_a(\theta) = \frac{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)}{(x'^2(\theta)+y'^2(\theta))^{3/2}}$. Montrer que la courbure dans ce cas est donnée par

$$k_a(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{\left(f^2(\theta) + f'^2(\theta)\right)^{3/2}}.$$

(1.4) Calculer la longueur de γ, notée ℓ

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left(x'^2(\theta) + y'^2(\theta)\right)^{1/2} d\theta.$$

(1.5) Application : calculer la courbure et la longueur dans le cas de la cartioïde $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ avec $a = 0$ et $b = 2\pi$

Remarque. Veuillez nous rendre vos réponses aux e-mails suivants en réspéctant les groupes :
m.zerguine@univ-batna2.dz , f.sidiali@univ-batna2.dz