Prop. I.2.4. (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg). Soit

$$2^* = \begin{cases} +\infty & \text{pour } N = 1,2 \\ \dfrac{2N}{N-2} & \text{pour } N \geq 3 \end{cases}$$

Soit $p \in [2, 2^*[$, alors

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\sigma} \|\nabla u\|_{L^2}^{\sigma}, \qquad \sigma = \frac{N(p-2)}{2p}$$

Dém. Compte tenant du théoreme I.2.2, on a:

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^N)}, \quad \cdots \quad (1)$$

puisque $\sigma = \dfrac{N(p-2)}{2p}$, alors $p = \dfrac{2N}{N-2\sigma}$.

On remarque que la contrainte $2 \leq p < 2^*$ assure $\sigma \in [0,1[$ (laissez aux étudiants). D'après l'estimation

$$\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta} \|u\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^N)}^{\theta}, \quad s \in [s_1, s_2], \ \theta \in [0,1]$$

Pour notre cas $s = \sigma$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, par conséquent $(\theta = \sigma)$

$$\|u\|_{\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{\dot{H}^0(\mathbb{R}^N)}^{1-\sigma} \|u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)}^{\sigma} \qquad (2)$$

Mettre ensemble (1) et (2), on trouve l'estimation désirée.

Remarque importante. Quelle sont les phénomènes qui empêchent la compacité de l'injection dans le théoreme I.2.2?

- Translations. Soit $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$, $f \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$f_n(x) = \tau_{y_n} f(x) = f(x - y_n), \quad y_n \longrightarrow +\infty \text{ dans } \mathbb{R}^N, \text{ lorsque } n \to \infty$$

Il est clair que $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ et $\|f_n\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$

Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y_n)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x+y_n)\,dx$$

Par le théorème de convergence dominée, on prouve que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x+y_n)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} f(x)\underbrace{\varphi(x+y_n)}_{\to 0}\,dx$$
$$=0$$

Donc $f_n \rightharpoonup 0$ dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$. Si l'injection était compacte, on aurait $f_n \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ ce qui contredit le fait que $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \neq 0$ $\square$

— Dilatations. De même, soit $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$, $f \not\equiv 0$. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\delta_{h_n} f(x) = \frac{1}{h_n^{N/p}} f\left(x/h_n\right),$$

où $(h_n)_n$ est une suite de réels positifs tendant vers 0 lorsque $n\to+\infty$. On vérifie que

$$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \|f_n\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$$

D'une manière analogue, on démontre que

$$f_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } \dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$$

Si l'injection était compacte, on aurait $f_n \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, ce qui contredit le fait que

$$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \neq 0 \quad \square$$

Fin de chapitre