CHAPITRE II
EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

II.1 Equations de Navier-Stokes (Description du modèle)

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues, en introduisant la loi rhéologique des fluides Newtoniens dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et en considérant l'équation de Conservation de la masse que nous supposons ici d'être celle des écoulements incompressibles. Ces facteurs conduisent aux équations de Navier-Stokes incompressibles

$$(NS_\mu) \cdots \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + v(t,x).\nabla v(t,x) - \mu \Delta v(t,x) + \nabla p(t,x) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(t,x)_{t=0} = v_0(x). \end{cases}$$

Ici : $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ désigne le champ de vecteur de la vitesse localisé à $x \in \mathbb{R}^N$ à l'instant $t > 0$, $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de la pression et μ est un paramètre positif représente la viscosité du fluide, où :

— $\operatorname{div} v = 0$ signifie que le fluide est un incompressible

— $\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^{N} \partial_j v^j$, $\quad v.\nabla = \sum_{j=1}^{N} v^j \partial_j$ et $\Delta v = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2$

Les équations (NS_μ) modelisent l'écoulement ou le mouvement des fluides réels comme l'eau, lubrifiant, miel ..., où la viscosité varie d'un fluide à un autre.

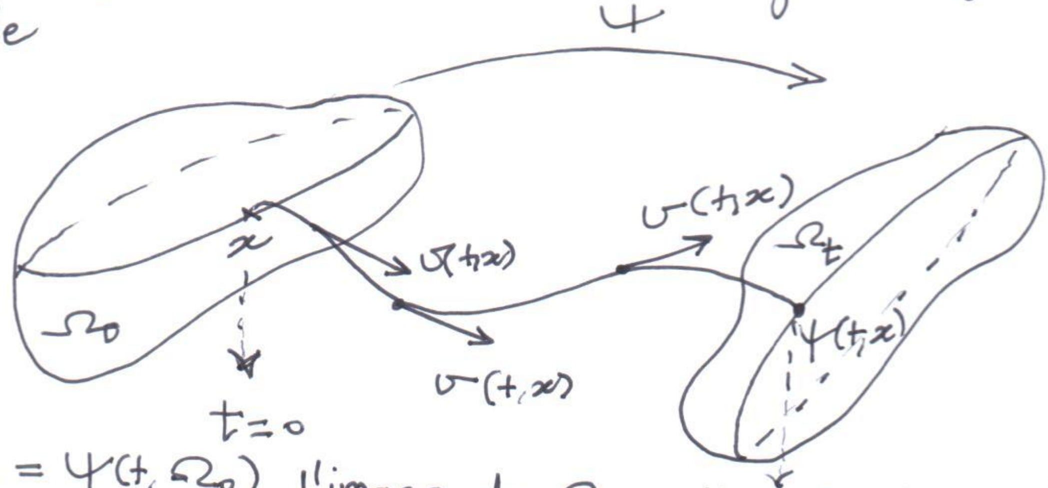
Déf II.1.1. Soit $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ le champ de vecteurs de la vitesse. L'application $\Psi_t : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est dit un "flot" associé à v s'il est vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = v(t,\psi(t,x)) & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N, \\ \psi(0,x) = x \end{cases}$$

ou l'équation intégrale équivalente:

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(\tau,\psi(\tau,x))\,d\tau$$

Conséquences. 1/ On considère un ouvert régulier Ω_0 occupé un fluide



où, $\Omega_t = \psi(t,\Omega_0)$ l'image de Ω_0 par ψ, $t>0$ et v est la variable eulérienne, par contre $\psi(t,x)$ est la variable Lagrangienne

Les équations (NS_μ) proviennent du second loi de Newton, plus précisément

$$\rho\vec{\gamma} = \sum \vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_v,$$

où $\vec{\gamma}$ désigne l'accélération donnée par la formule

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(t,\psi(t,x)) &= \frac{d}{dt} v(t,\psi(t,x)) \\ &= \frac{dt}{dt}\frac{\partial}{\partial t} v(t,\psi(t,x)) + \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)\nabla v(t,\psi(t,x))\end{aligned}$$

Or, $\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = v(t,\psi(t,x))$, par conséquent

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} v(t,\psi(t,x)) + v(t,\psi(t,x))\nabla v(t,\psi(t,x))\right) \\ &= -\nabla p(t,\psi(t,x)) + \mu\Delta v(t,\psi(t,x))\end{aligned}$$

Dans le cas d'un fluide homogène la densité est constante c'est-à-dire $\rho\equiv\rho_0\in\mathbb{R}_+$, donc l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,\psi(t,x)) + v(t,\psi(t,x)).\nabla v(t,\psi(t,x)) + \frac{1}{\rho_0}\nabla p(t,\psi(t,x)) - \mu\Delta v(t,\psi(t,x)) = 0$$

L'equation ci-dessus est vraie pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, alors, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + v(t,x)\cdot\nabla v(t,x) + \nabla p(t,x) - \mu \Delta v(t,x) = 0$$

2/ Signification de $\operatorname{div} v = 0$.

Déf II.1.2 On dit que le fluide est incompressible si l'une des assertions Equivalentes suivante est vérifiée

1/ $Vol(\Omega_0) = Vol(\Omega_t)$,

2/ $\operatorname{div} v = 0$,

3/ $|J_\psi| = \det(\nabla_x \psi(t,x)) = 1$, où J_ψ est la Jacobienne associe à ψ.

Dém. En effectuant le changement de variable $x \mapsto \psi(t,x)$ pour réduire l'integration sur le domaine mouve en temps Ω_t à un intégration sur un domaine fixé Ω_0 dans sens suivant :

$$\int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx = \int_{\psi(t,\Omega_0)} f(t,x)\,dx = \int_{\Omega_0} f(t,\psi(t,x))\,|J_\psi(t,x)|\,dx$$

Or, les deux identités suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = v(t,\psi(t,x)) \\ \psi(0,x) = x \end{cases}$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_{\psi(t,\Omega_0)} f(t,x)\,dx = \int_{\psi(t,\Omega_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) + \operatorname{div}_x (fv)(t,x)\right) dx$$

impliquent

$$\frac{d}{dt}\int_{\psi(t,\Omega_0)} f(t,x)\,dx = \int_{\Omega_0} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\cdot\nabla f\right)|J_\psi| + f\frac{\partial}{\partial t}|J_\psi|\right.$$

$$= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla f + f \operatorname{div} v \right) |J_\psi| \, dx$$

$$= \int_{\psi(t,\Omega_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(v f) \right) dx,$$

Mais le bilan de la masse associe à f est par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(v f) = 0$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi(t,\Omega_0)=\Omega_t} f(t,x)\, dx = 0$$

On prend $f(t,x) = 1$, il en résulte

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = 0, \quad \Omega_t = \psi(t,\Omega_0)$$

Une simple intégrale sur $[0,t]$ nous donne

$$\operatorname{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_0} dx = \operatorname{Vol}(\Omega_0).$$

Pour le 2ème point, vu que le fluide est homogène alors $f \equiv f_0 \in \mathbb{R}_+$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(v f) = 0 \iff f_0 \operatorname{div} v = 0$$

Alors $\operatorname{div} v = 0$.

Le 3ème point decoule de la relation suivante

$$(1) \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial}{\partial t} |J_\psi| = \frac{\partial}{\partial t} \det\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(t,x) \right]_{1 \le i,j \le N} = \sum_{i,j=1}^{N} A_i^j \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(t,x)$$

ou A_i^j est le mineur des éléments de $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ de la matrice $\nabla_x \psi$.
les mineurs satisfient l'identité

$$(2) \quad \cdots\cdots \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} A_i^j = \delta_i^k |J_\psi|, \text{ où } \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i \\ 0, & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

(Symbole de Kronicker)

Par suite

$$\frac{\partial}{\partial t}|J_\psi| = \sum_{k,i,j=1}^{N} A_i^j \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} v^i \delta_i^k |J_\psi| = |J_\psi| \operatorname{div}$$

Comme $\operatorname{div} v = 0$ alors

$$\frac{\partial}{\partial t}|J_\psi| = 0.$$

On intègre sur $[0,t]$, on obtient

$$|J_{\psi(t,x)}|(t,x) = |J_{\psi(0,x)}(0,x)| = 1.$$

D'où le résultat.

Pour expliquer les identités (1) et (2), on se place dans $\mathbb{R}^2$. La matrice Jacobienne de $\psi(t,x)$ par rapport à x est donnée par

$$J_\psi(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,x) & \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_2(t,x) & \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2(t,x) \end{pmatrix}$$

Ainsi le Jacobien est

$$|J_\psi|(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,x)\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2(t,x) - \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1(t,x)$$

On dérive par rapport à "t", on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}|J_\psi|(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,x)\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2(t,x) + \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1(t,x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t,x) - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1(t,x) -$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_2(t,x)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t,x)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} A_i^j \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(t,x),$$

où