I.2. Injections de Sobolev

<u>Déf. I.2.1.</u> Soit $X \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ un espace de Banach, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons la transformation $v_\lambda(x) = \lambda v(\lambda x)$, où v est une fonction régulière. On dit que X est invariante par changement d'échelle ssi

$$\|\lambda v_\lambda(\cdot)\|_X = \|v\|_X .$$

<u>Exemples.</u>

1 – $X = L^p(\mathbb{R}^N)$ muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on voit que

$$\|\lambda v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda v_\lambda(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^p |v(\lambda x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Posons $y = \lambda x$, $x = y/\lambda$ donc $dx = dy/\lambda^N$. Par conséquent

$$\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(y)|^p dy/\lambda^N\right)^{1/p}$$

$$= \lambda^{1-N/p} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Pour que $L^p(\mathbb{R}^N)$ soit invariant par changement d'échelle il suffit $1 - N/p = 0$ donc $N = p$ et l'espace X sera $L^N(\mathbb{R}^N)$

2 – $X = \dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ muni de la norme

$$\|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\hat{v}_\lambda(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

D'autre part, on a =

$$\hat{v}_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} v_\lambda(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} \lambda v(\lambda x)\, dx$$

Posons $y = \lambda x$, alors $dx = dy/\lambda^N$. Il vient que

$$\hat{v}_\lambda(\xi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} e^{-iy\,\xi/\lambda}\, v(y)\, dy/\lambda^N = \lambda^{1-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-iy(\xi/\lambda)}\, v(y)\, dy$$

$$= \lambda^{1-N}\, \hat{v}(\xi/\lambda)$$

Ainsi, on aura

$$\|v_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\, |\lambda^{1-N}\, \hat{v}(\xi/\lambda)|^2\, d\xi \right)^{1/2}$$

$$= \lambda^{1-N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s}\, |\hat{v}(\xi/\lambda)|^2\, d\xi \right)^{1/2}$$

$$\overset{\zeta = \xi/\lambda}{=} \lambda^{1-N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda\zeta|^{2s}\, |\hat{v}(\zeta)|^2\, \lambda^N d\zeta \right)^{1/2}$$

$$= \lambda^{1-N+s+N/2}\, \|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{1-N/2+s}\, \|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}.$$

De même, pour que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ soit invariant par changement d'échelle, il suffit $1 - N/2 + s = 0$, donc $s = N/2 - 1$ et l'espace X sera $\dot{H}^{N/2-1}(\mathbb{R}^N)$.

<u>Th I.2.2</u> (Injection de Sobolev homogène). Soit $0 \leq s < N/2$, alors $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ c'est-à-dire

$$\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) : \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_s \|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}, \quad (*)$$

avec $p = \dfrac{2N}{N-2s}$.

<u>Remarque.</u> Si $s = 0$, il est clair que $\dot{H}^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$

<u>Dém.</u> Pour déterminer l'indice p, on procède par l'argument de l'invariance par changement d'échelle. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$, alors $\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{1-N/p}\, \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ et $\|v_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{1-N/2+s}\, \|v\|_{\dot{H}^s(}$

Supposons que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire

$$\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_s \|v_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$$

Par conséquent
$$\lambda^{1-N/p}\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_s\, \lambda^{1-N/2+s}\|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$$
Un calcul simple nous donne
$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_s\, \lambda^{N/p-N/2+s}\|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$$
Pour que l'injection soit vraie, il suffit de prendre
$$N/p - N/2 + s = 0 \iff N/p = N/2 + s = \frac{N+2s}{2}$$
$$\iff \boxed{p = \frac{2N}{N-2s}}$$
La démonstration de $(*)$ repose sur la méthode d'interpolation réelle. Découpons f en basses et hautes fréquences, en posant (on remplace v par f)
$$f = f_{1,A} + f_{2,A} \text{ avec } f_{1,A} = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B(0,A)}\hat{f})$$
$$f_{2,A} = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B^c(0,A)}\hat{f}),$$
où χ_B désigne la fonction caractéristique de B. On voit clairement que $\operatorname{supp}\hat{f}_{1,A} = \operatorname{supp}\chi_{B(0,A)}\hat{f} \subset B(0,A)$, alors la fonction $f_{1,A}$ est bornée et, plus précisement
$$\|f_{1,A}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-N}\|\hat{f}_{1,A}\|_{L^1} : \mathcal{F}^{-1} : L^1 \longrightarrow L^\infty$$
$$\leq (2\pi)^{-N}\int_{B(0,A)} |\xi|^{-s}|\xi|^{s}|\hat{f}(\xi)|\,d\xi$$
$$\overset{C.S}{\leq} (2\pi)^{-N}\left(\int_{B(0,A)} |\xi|^{-2s}d\xi\right)^{1/2}\|f\|_{\dot{H}^s}$$
pour le terme $\int_{B(0,A)}|\xi|^{-2s}d\xi$, on fait un changement de variable en coordonnées polaires, on obtient
$$\int_{B(0,A)}|\xi|^{-2s}d\xi = \int_{S_{N-1}}\int_0^A r^{-2s}\, r^{N-1}\,dr\,d\theta$$

$$= \omega_N \int_0^A r^{N-1-2s} dr = \omega_N \frac{1}{(N-2s)} r^{N-2s} \Big|_0^A$$

$$= \omega_N \frac{1}{(N-2s)} A^{N-2s} \iff s < \frac{N}{2}$$

Mettre ensemble les estimations précendentes, on trouve

$$\|f_{1,A}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-N} \omega_N^{1/2} / (N-2s)^{1/2} A^{N/2 - s} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)}$$

$$= C_s A^{N/2 - s} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} . \quad (**)$$

D'après l'inégalité triangulaire pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^N : |f_{1,A}(x)| > \lambda/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^N : |f_{2,A}(x)| > \lambda/2\}$$

L'inégalité $(**)$ ci-dessus implique

$$A \leq A_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left(\lambda / 4C_s\right)^{p/N} \Rightarrow \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^N : |f_{1,A}(x)| > \lambda/2\}\right) = 0$$

D'autre part,

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx = p \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1} d\lambda \, dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} p \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} dx \, d\lambda .$$

Or,

$$\mathbb{R}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| \leq \lambda\} \cup \{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > \lambda\}$$

donc

$$\|f\|^p_{L^p} \leq p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mu \{x \in \mathbb{R}^N : |f_{2,A_\lambda}(x)| > \lambda/2\} d\lambda$$

Afin, de majorer $\mu \{x \in \mathbb{R}^N : |f_{2,A}(x)| > \lambda/2\}$, on fait intervenir la norme L^2. Pour ce faire, l'inégalite de Bienaymé-Tchebychev nous donne

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^N : |f_{2,A}(x)| > \lambda/2\} \leq \int_{\{x : |f_{2,A}(x)| > \lambda/2\}} dx \leq \int_{\{x : |f_{2,A}(x)| > \lambda/2\}} 4|f_{2,A_\lambda}(x)|^2/\lambda^2 \, dx$$

$$\leq 4 \; \| f_{2,A_\lambda} \|^2_{L^2} / \lambda^2$$

Il en résulte donc que l'on a:

$$\| f \|^p_{L^p} \leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \, \| f_{2,A_\lambda} \|^2 \, d\lambda$$

Or, $\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \| \hat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ alors

$$\| f_{2,A_\lambda} \|^2_{L^2} = (2\pi)^{-N} \int_{|\xi| \geq A_\lambda} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi$$

Par définition de A_λ, on a

$$|\xi| \geq A_\lambda \iff \lambda \leq C_\xi \overset{\text{def}}{=} 4 C_\Delta |\xi|^{N/p}$$

Finalement le théorème de Fubini nous permet d'écrire

$$\| f \|^p_{L^p} \leq 4p (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^{C_\xi} \lambda^{p-3} d\lambda \right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq 4 \; \frac{p \, (2\pi)^N}{p-2} (4 C_\Delta)^{p-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{N(p-2)/p} \, |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Le fait que $2\Delta = \frac{N(p-2)}{p}$, l'estimation $(*)$ est demontré

Remarque $\quad \dot{H}^{N/2} \not\hookrightarrow L^\infty$ (voir TD)

Conséquences.

Prop. I.2.3. (Injection duale de Sobolev). Soit $p \in [1,2]$, alors $L^p(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $H^{-\Delta}(\mathbb{R}^N)$ avec $\Delta = N/p - N/2$,

$$L^p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{-\Delta}(\mathbb{R}^N).$$

Dém. Par l'argument de densité, on restreint notre demonstration sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ c'est-à-dire

$$\| v \|_{H^{-\Delta}(\mathbb{R}^N)} \leq C \| v \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'après la proposition du dual de $H^\Delta(\mathbb{R}^N)$, on a:

$$\| v \|_{H^{-\Delta}(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{S} \\ \|\varphi\|_{H^\Delta} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^N} v(x) \varphi(x) \, dx$$

Donc d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\|v\|_{H^{-\Delta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant (2\pi)^N \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\\ \|\varphi\|_{H^\Delta}\leqslant 1}} \|v\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

Mais, vu que

$$\Delta = N/p - N/2 = N(1-1/p') - N/2 = -N/p' + N/2 \Leftrightarrow$$

$$N/p' = N/2 - \Delta = \frac{N-2\Delta}{2} \Leftrightarrow p' = \frac{2N}{N-2\Delta}.$$

Ce qui donne pour toute $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\varphi\|_{H^\Delta(\mathbb{R}^N)} \quad / \quad \|\varphi\|_{H^\Delta(\mathbb{R}^N)} \leqslant 1$$

Par conséquent

$$\|v\|_{H^{-\Delta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant (2\pi)^N \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense, cela achève la démonstration.