RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS
LEDPA

SUPPORT PÉDAGOGIQUE EN MATHÉMATIQUES, 3ème année LMD

INTITULÉ :

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RÉALISÉ PAR :
DR. ZERGUINE MOHAMED

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2014-2015

TABLE DES MATIÈRES

1

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

1.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est destiné à l'étude des équations aux dérivées partielles du 1er ordre dans le cadre général sous des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann. Cette étude est basée essentiellement sur la méthode des caractéristiques qui consiste de chercher des courbes dites *caractéristiques* ou parfois changement de coordonnées, de sorte que le problème aux limites en question se convertit à un système des équations différentielles ordinaires du 1er ordre. Ensuite nous utilisons lés méthodes standards pour la résolution du système obtenu. Une grande partie de ce chapitre est réservé à une étude bien détaillée des équations de transport vu son importance dans diverses disciplines. Pour illustrer les méthodes théoriques utilisées une dizaines d'exercices sont donnés.

1.2 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Définition 1.2.1. *Une équation aux dérivées partielles ou EDP du premier ordre est une équation reliant une fonction à ses dérivées partielles du premier ordre ou une équation reliant entre elles les dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction. Autrement dit une expression de la forme*

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \tag{1.2.1}$$

où $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une relation donnée, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue et ∇ est l'opérateur gradient défini comme suit :

$$\nabla = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N}). \tag{1.2.2}$$

Définition 1.2.2. *Toute fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω vérifiant* (1.2.1) *est dite solution classique.*

Remarque. *Pour pouvoir résoudre l'équation ci-dessus nous cherchons toutes les solutions vérifiant* (1.2.1)*, en demandant des conditions aux limites (bords) de cette fonction, autrement dit les valeurs de u sur le bord $\partial\Omega$ ou sur une partie de $\partial\Omega$ et des conditions initiales c'est à dire on a des informations sur la fonction à l'instant $t = 0$. Cette remarque nous conduit à la définition suivante :*

Définition 1.2.3. *Soient Γ une sous partie de $\partial\Omega$ et $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Les conditions aux bords sont données par :*

(1) *Condition de type Dirichlet :*

$$u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

(2) *Condition de type Neumann :*

$$u = \frac{\partial g}{\partial \nu}^{1},$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu} \triangleq \nabla \cdot \nu$ *et* ν *désigne le vecteur normal sortant du* Γ *vers l'extérieure.*

Maintenant, nous considérons le problème aux limites de type Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{si } x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

où $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ est une fonction de régularité adéquate de sorte que (1.2.3) admet une solution unique.

Les équations aux dérivées partielles non-linéaires de type (1.2.3) apparaissent dans diverses théories de la physique, principalement la dynamique, la mécanique des milieux continus comme la conservation de la masse, la quantité du mouvement et l'optique géométrique... etc.

– **Exemples.**

(E1) Équation de transport linéaire à vitesse constante.

◇ Cas unidimensionnel :

$$\partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1.2.4}$$

où $c > 0$ est dite la vitesse caractéristique.

◇ Cas multidimensionnel :

$$\partial_t u(x,t) + c \cdot \nabla u(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{1.2.5}$$

où $c = (c_j)_{1 \leq j \leq N}$ est un vecteur de composantes positives.

(E2) Équation d'Euler.

◇ Cas unidimensionnel :

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) + \partial_x p(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1.2.6}$$

où u et p désignent respectivement la vitesse et la pression.

◇ Cas multidimensionnel :

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t) \cdot \nabla u(x,t) + \nabla p(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{1.2.7}$$

Cette équation modélise l'écoulement d'un fluide parfait dans un tube horizontal. Elle était considérée comme un défit au cours du 21ème siècle.

(E3) Équation eikonale.

◇ Cas unidimensionnel :

$$|u'(x)| = 1. \tag{1.2.8}$$

◇ Cas multidimensionnel :

$$|\nabla u(x)| = 1. \tag{1.2.9}$$

1. La dérivée directionnelle d'une fonction régulière g est définie par $\frac{\partial g}{\partial \nu} = \nabla g \cdot \nu$

1.3 LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Pour pouvoir résoudre l'équation (1.2.1), nous développons la méthode des *caractéristiques* qui consiste à convertir une EDP à un système d'équations différentielles ordinaires EDO approprié. Pour cela, nous cherchons une courbe (changement de coordonnées) à l'intérieur de Ω de sorte que si on projette l'EDP, on obtient un système d'EDO.

Définition 1.3.1. *Soit $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), \ldots, x_N(s))$ une courbe paramétrisée de paramètre $t \in I$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Alors la dérivation le long de la courbe $\mathbf{x}$ est définie comme suit :*

$$\dot{u}(\mathbf{x}(s)) = \sum_{j=1}^{N} \dot{x}_j(s)\partial_{x_i} u(\mathbf{x}(s)). \tag{1.3.1}$$

Soit $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(t), \ldots, x_N(s))$ une courbe paramétrisée de paramètre $t \in I$, où $I \subset \mathbb{R}$. Supposons que u est de classe $\mathbf{C}^2$ sur Ω solution de (1.2.1).
Définissons

$$z(s) \triangleq u(\mathbf{x}(s)) \tag{1.3.2}$$

et posons

$$p(s) \triangleq \nabla u(\mathbf{x}(s)), \tag{1.3.3}$$

c'est-à-dire $p(s) = (p_1(s), \ldots, p_N(s))$, où

$$p_i(s) = \partial_{x_i} u(\mathbf{x}(s)) \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \tag{1.3.4}$$

Ainsi $z(\cdot)$ représente les valeurs de u le long de la courbe et $p(\cdot)$ désigne les valeurs du gradient ∇u. On doit choisir la fonction $\mathbf{x}(\cdot)$ de sorte qu'on peut calculer explicitement $z(\cdot)$ et $p(\cdot)$. Pour cette raison, la différentiation de l'identité (1.3.3) nous donne le suivant :

$$\dot{p}_i(s) = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_i x_j} u(\mathbf{x}(s))\dot{x}_j(s) \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \tag{1.3.5}$$

Cette expression n'est pas trop prometteuse, puisqu'elle nécessitera la seconde dérivée de u. On doit différencier encore une fois l'EDP (1.2.1) par rapport à x_i, ce qui donnera l'expression suivante :

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial p_j} F(\mathbf{x}, u, \nabla u)\partial_{x_j x_i} u + \frac{\partial}{\partial z} F(\mathbf{x}, u, \nabla u)\partial_{x_i} u + \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0. \tag{1.3.6}$$

Nous employons cette identité pour débarrasser le terme de la seconde dérivée dans (1.3.5). Pour surmonter ce problème posons

$$\dot{x}_j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(\mathbf{x}(s), z(s), p(s)). \tag{1.3.7}$$

Supposons que (1.3.5) est vérifiée et évaluons (1.3.6) en $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. En tenant compte de (1.3.2) et (1.3.3), ainsi nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial p_j} F(\mathbf{x}(s), z(s), p(s))\partial_{x_i x_j} u + \frac{\partial}{\partial z} F(\mathbf{x}(s), z(s), p(s))p_i(s) + \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}(s), z(s), p(s)) = 0. \tag{1.3.8}$$

En substituant (1.3.5) et (1.3.8) dans (1.3.4), il en résulte

$$\dot{p}_i(s) = -\frac{\partial}{\partial x_i}F(\mathrm{x}(s), z(s), p(s)) - \frac{\partial}{\partial z}F(\mathrm{x}(s), z(s), p(s))p_i(s) \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \qquad (1.3.9)$$

Finalement la différentiation de l'identité (1.3.2) implique

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathrm{x}(s))\dot{x}_j(s).$$

En combinant (1.3.6) et (1.3.3) il vient

$$\dot{z}(s) = \sum_{i=1}^{N} p_j(t)\frac{\partial F}{\partial p_j}(\mathrm{x}(s), z(s), p(s)). \qquad (1.3.10)$$

En résumant, de (1.3.9) et (1.3.10) on obtient un système d'EDO sous la forme vectoriel suivante :

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \dot{p}(s) = -\nabla_{\mathrm{x}}F(\mathrm{x}(s), z(s), p(s)) - \nabla_z F(\mathrm{x}(s), z(s), p(s)) \\ \text{(b)} \quad \dot{z}(s) = \nabla_p F(\mathrm{x}(s), z(t), p(t)) \cdot p(t) \\ \text{(c)} \quad \dot{\mathrm{x}}(s) = \nabla_p F(\mathrm{x}(s), z(s), p(s)). \end{cases} \qquad (1.3.11)$$

– **Remarque.** Le système d'EDO défini ci-dessus est composé de $2n+1$ d'EDOs du 1er premier d'une importance remarquable y est compris les équations caractéristiques du système non linéaire EDP du 1er premier ordre (1.2.1).

Définition 1.3.2. *Les fonctions* $p(\cdot) = (p_1(\cdot), \ldots p_N(\cdot))$ *et* $\mathrm{x}(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots x_N(\cdot))$ *sont appelées les fonctions caractéristiques.*

Alors nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.3.3. *Soit* $u \in C^2(\Omega)$ *une solution du système non linéaire du premier ordre* (1.2.1) *dans* Ω. *Supposons que* $\mathrm{x}(\cdot)$ *est une solution de* (1.3.11) *(c), avec* $p(\cdot) = \nabla u(\mathrm{x}(\cdot))$, $z(\cdot) = u(x(\cdot))$. *Alors* $p(\cdot)$ *et* $z(\cdot)$ *sont des solutions respectivement de (a) et (b) du système d'EDO* (1.3.11) *de sorte que* $\mathrm{x}(\cdot) \in \Omega$.

Remarque. *Les caractéristiques d'EDO sont vraiment remarquables dans le sens où elles forment un système fermé d'équations pour* $\mathrm{x}(\cdot)$, $z(\cdot) = u(\mathrm{x}(\cdot))$, *et* $p(\cdot) = \nabla u(\mathrm{x}(\cdot))$, *dès que* u *est une solution régulière de l'EDPs non-linéaire donnée par* (1.2.1)

Pour illustrer les résultat du théorème ci-dessus, nous abordons quelques cas particuliers du système (1.2.1)

1.4 CAS PARTICULIERS

1er cas : Supposons que F est linéaire c'est-à-dire,

$$F(\mathrm{x}, z, p) = b(\mathrm{x}) \cdot p + c(\mathrm{x})z.$$

Alors l'équation d'EDPs devient comme suit

$$b(\mathrm{x}) \cdot \nabla u(\mathrm{x}) + c(\mathrm{x})u(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \qquad (1.4.1)$$

où $b(\mathbf{x}) = \nabla_p F$ et $\dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s))$. De plus l'équation (b) du système d'EDO (1.3.11) prend la forme

$$\dot{z}(t) = b(\mathbf{x}) \cdot p(t) \tag{1.4.2}$$

Puisque $p(\cdot) = \nabla u(\mathbf{x}(\cdot))$, alors (1.4.1) et (1.4.2) nous conduisent au système d'EDO caractéristique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s))z(s). \end{cases} \tag{1.4.3}$$

– **Exemple 1.** Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} x_1\partial_{x_2}u - x_2\partial_{x_1}u = u & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.4.4}$$

où $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ est un quadrant de $\mathbb{R}^2$ et $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière, avec

$$\Gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 > 0,\ x_2 = 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Alors l'EDP (1.4.4) a la même forme que (1.4.1) pour $b = (-x_2, x_1)$ et $c = -1$. Ainsi, le système d'EDO caractéristique donné par (1.4.3) s'écrit par composante comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = -x_2(s) \\ \dot{x}_2(s) = x_1(s) \\ \dot{z}(s) = z(s). \end{cases} \tag{1.4.5}$$

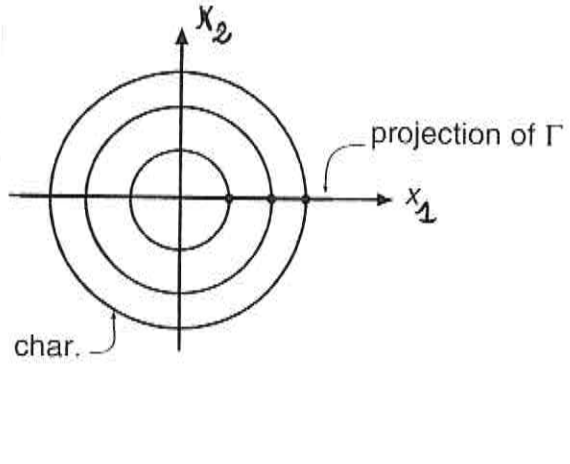
Par conséquent, le système ci-dessus se réduit à,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(s) = -x_1(s) \\ \dot{z}(s) = z(s). \end{cases} \tag{1.4.6}$$

Donc, on obtient

$$\begin{cases} x_1(s) = x^0 \cos s,\ x_2(s) = x^0 \sin s \\ z(s) = z^0 e^s = g(x^0)e^s, \end{cases}$$

où $x^0 \geq 0,\ 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$.



Nous fixons $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ et nous sélectionnons $s > 0$ et $x^0 > 0$ de sorte que

$$(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (x^0 \cos s, x^0 \sin s).$$

On déduit que $x^0 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ et $s = \arctan \frac{x_2}{x_1}$.

D'où l'on obtient

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u(x_1(s), x_2(s)) \\ &= z(s) = g(x^0)e^s \\ &= g((x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}})e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}}. \end{aligned}$$

– **Remarque.** On voit que la solution du problème aux limites (1.4.4) dépende clairement de la condition aux limites g, c'est-à-dire les valeurs de g sur Γ.

2ème Cas : Supposons que F est quasi-linéaire dans le sens ou

$$F(\mathbf{x}, z, p) = b(\mathbf{x}, z) \cdot p + c(\mathbf{x}, z).$$

Ainsi, l'EDP obtenue est donnée par :

$$b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.4.7}$$

où $b(\mathbf{x}, z) = \nabla_p F$ et $\mathbf{x}(t) = b(\mathbf{x}(t))$.
Ainsi l'équation (c) du système d'EDO (1.3.11) s'écrit

$$\dot{z}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)). \tag{1.4.8}$$

En tenant compte de (1.4.8) et l'équation (c) de (1.3.11) il vient

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)). \tag{1.4.9}$$

Finalement de (1.4.7), (1.4.8) et (1.4.9) on obtient le système caractéristique d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = b(\mathbf{x}(s), z(s)) \\ \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)). \end{cases} \tag{1.4.10}$$

Remarques. – *La résolution du problème aux limites* (1.2.3) *entraine la résolution du système d'EDO donné par* (1.3.11).
– *La fonction* $p(\cdot)$ *n'apparait pas dans le système* (1.4.2).

– **Exemple 2.** La résolution du système d'EDO caractéristique ci-dessus est généralement difficile, ici on travaille sur un problème aux limites simple donné par :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u = u^2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.4.11}$$

où $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ et $\Gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\} = \partial\Omega$. Ici $b = (1,1)$ et $c = -z^2$.
Alors (1.4.10) devient comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(s) = 1, \quad \dot{x}_2(s) = 1 \\ \dot{z}(s) = z^2(s). \end{cases}$$

En intégrant sur $[0,t]$ il vient

$$\begin{cases} x_1(s) = x^0 + s, \quad x_2 = s \\ \dot{z}(s) = \frac{z^0}{1-sz^0} = \frac{g(x^0)}{1-sg(x^0)}, \end{cases}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, de sorte que le dénominateur soit différent de zéro.
Fixons un point $(x_1, x_2) \in \Omega$ et soient $s > 0$ et $x^0 \in \mathbb{R}$ tels que $(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (x^0 + s, s)$, c'est-à-dire, $x^0 = x_1 - x_2, s = x_2$. Alors $x^0 = x_1 - x_2$, $s = x_2$.
Il s'ensuit

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)} \\ &= \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2)}. \end{aligned}$$

3ème Cas : Dans le cadre général, on doit intégrer le système caractéristique d'EDO (1.3.11), s'il est possible.

– **Exemple 3.** Considérons le problème aux limites non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u(\mathbf{x}) \partial_{x_2} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = x_2^2 & \text{si } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma, \end{cases}$$

où $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ et $\Gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} = \partial\Omega$.
Ici $F(\mathbf{x}, z, p) = p_1 p_2 - z$ et ainsi (1.3.11) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(s) = p_1(s), \ \dot{p}_2(s) = p_2(s) \\ \dot{z}(s) = 2p_1(s)p_2(s), \end{cases} \tag{1.4.12}$$

où s est paramètre réel qu'on va le déterminer ultérieurement.
En intégrant ces équations sur $[0,t]$ on obtient :

$$\begin{cases} x_1(s) = p_2^0(e^s - 1), \quad x_2(s) = x^0 + p_1^0(e^s - 1) \\ z(s) = z^0 + p_1^0 p_2^0(e^{2s} - 1) \\ p_1(s) = p_1^0 e^s, \quad p_2(s) = p_2^0 e^s, \end{cases}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ et $z^0 = (x^0)^2$.
Nous devons déterminer $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$. Puisque $u(\mathbf{x}) = x_2^2$ sur Γ, $p_2^0 = \partial_{x_2} u(0, x^0) = 2x^0$.
De plus l'EDP $\partial_{x_1} u(\mathbf{x}) \partial_{x_2} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ elle-même implique $p_1^0 p_2^0 = z^0 = (x^0)^2$, et ainsi

$p_1^0 = \frac{x^0}{2}$.
Par conséquent, les formules précédentes nous donne

$$\begin{cases} x_1(s) = 2x^0(e^s - 1), \quad x_2(s) = \frac{x^0}{2}(e^s + 1) \\ z(s) = (x_0)^2 e^{2s} \\ p_1(s) = \frac{x^0}{2}e^s, \quad p_2(s) = 2x^0 e^s. \end{cases}$$

Fixons un point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ et sélectionnons s et x^0 tels que

$$(x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s)) = (2x^0(e^s - 1), \frac{x^0}{2}(e^s + 1)).$$

Cette identité implique $x^0 = \frac{4x_2 - x_1}{4}$, $e^s = \frac{x_1 + 4x_2}{4x_2 - x_1}$ et ainsi

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= u(x_1(s), x_2(s)) = z(s) = (x^0)^2 e^{2s} \\ &= \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}. \end{aligned}$$

1.5 EXERCICES

Exercice 1. Utilisez la méthode des caractéristiques pour résoudre les problèmes aux limites suivants :

(1) $x_1 \partial_{x_1} u(x_1, x_2) + x_2 \partial_{x_2} u(x_1, x_2) = 2u(x_1, x_2), \quad u(x_1, 1) = g(x_1)$.

(2) $u(x_1, x_2)\partial_{x_1} u(x_1, x_2) + \partial_{x_2} u(x_1, x_2) = 1, \quad u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1$.

(3) $x_1 \partial_{x_1} u(x_1, x_2, x_3) + 2x_2 \partial_{x_2} u(x_1, x_2, x_3) = 3u(x_1, x_2, x_3), \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$.

(4) $\sqrt{1 - x^2}\partial_{x_1} u(x_1, x_2) + \partial_{x_2} u(x_1, x_2) = 0, \quad u(0, x_2) = x_2$.

(5) $\partial_{x_1} u(x_1, x_2) + \partial_{x_2} u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2) = e^{x_1 + 2x_2}, \quad u(x_1, 0) = 0$.

Exercice 2. Résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (x_2 + u)\partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} u = x_1 - y_1, \\ u(x_1, 1) = x_1 + 1. \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre l'équation $\partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u + u = 1$ sous les conditions aux limites suivantes :

$$u = \sin x_1, \quad \text{sur } x_2 = x_1^2 + x_1, \quad x_1 > 0.$$

Exercice 4. Considérons l'EDP suivante :

$$x_2 \partial_{x_1} u - u \partial_{x_2} u = x_1.$$

(1) Ecrire la représentation paramétrique des courbes caractéristiques.

(2) Résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} x_2 \partial_{x_1} u - u \partial_{x_2} u = x_1 \\ u(s, s) = -2s \qquad \text{si } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(3) Est ce que le problème aux limites suivant est solvable :

$$\begin{cases} x_2\partial_{x_1}u - u\partial_{x_2}u = x_1 & \\ u(s,s) = s & \text{si } s \in \mathbb{R}\,?. \end{cases}$$

(4) Posons

$$w_1 = x_1 + x_2 + u, \quad w_2 = x_1^2 + x_2^2 + u^2, \quad w_3 = x_1x_2 + x_1u + x_2u.$$

Montrer que $w_1(w_2 - w_3)$ est constante le long de la courbe caractéristique.

Exercice 5. Résoudre ce qu'on appelle l'équation eikonale suivante :

$$\begin{cases} (\partial_{x_1}u)^2 + (\partial_{x_2}u)^2 = 1 & \text{si } x \in \Omega \\ u(x_1, 2x_2) = 1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Exercice 6. On considère l'équation différentielle du 1er ordre suivante :

$$\partial_{x_2}u = \partial_{x_1}x_1\Big(\frac{x_2}{x_1}u\Big). \tag{1.5.1}$$

Montrer que

(1) la solution générale de (1.4.1) est donnée par

$$u(x_1, x_2) = x_1 f(x_1^2 + x_2^2) \tag{1.5.2}$$

(2) la fonction

$$I(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}\int_0^\infty e^{-x_2\sqrt{1+t^2}}\cos x_1 t\,dt$$

satisfait l'équation (1.5.2),

(3) l'identité suivante est vérifiée

$$\int_0^\infty e^{-x_2\sqrt{1+t^2}}\cos x_1 t\,dt = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{(1+t^2)(x_1^2+x_2^2)}}dt, \quad x_2 > 0.$$

Exercice 7. Résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \partial_{x_1}u + \partial_{x_2}u + u = 0 & \text{si x} \in \Omega \\ u = \sin x_1 & \text{sur } x_2 = x_1 + x_1^2, \quad x > 0. \end{cases}$$

Exercice 8. Montrer, en utilisant la méthode des caractéristiques que si $u = u(x_1, x_2)$ satisfaisant l'équation :

$$x_1\partial_{x_1}u(x_1, x_2) + x_2\partial_{x_2}u(x_1, x_2) = nu(x_1, x_2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$u(x_1, x_2) = x_1^n f\Big(\frac{x_2}{x_1}\Big),$$

où f est une fonction arbitraire.

Exercice 9. Résoudre le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = -ku^2 & \text{si } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où k est une constante positive. Discuter les caractéristiques.

Exercice 10.

(1) Montrer que la solution générale de l'EDP $\partial_{x_1x_2}u(x_1,x_2) = 0$ est

$$u(x_1,x_2) = f(x_1) + g(x_2),$$

où f et g sont des fonctions arbitraires.

(2) Utiliser le changement de variables $\xi = x + t$ et $\nu = x - t$, pour montrer que

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{ssi} \quad \partial_{\xi\nu} u = 0.$$

(3) Utiliser (1) et (2) pour déduire la formule explicite de la solution.

Exercice 11. L'équation $x_1\partial_{x_1}u + (x_2/x_1 - x_1)u = 1$ est donnée sous la condition aux limites $u(1,x_2) = 0$.

(1) Résoudre le problème pour $x_1 > 0$. Calculer $u(3,6)$.

(2) Est ce que la solution est définie pour tout $x_1 > 0$?

Exercice 12. On considère l'EDP du 1er ordre suivante :

$$\partial_{x_2}u = \partial_{x_1}\Big(\frac{x_2}{x_1}u\Big). \tag{1.5.3}$$

Montrer que

(1) la solution générale de (1.5.3) est donnée par $u(x_1,x_2) = x_1 f(x_1^2 + x_2^2)$,

(2) la fonction

$$I(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}\int_0^\infty e^{-x_2\sqrt{1+t^2}}\cos(x_1 t)dt$$

satisfait l'équation (1.5.3),

(3) l'identité suivante est vérifiée

$$\int_0^\infty e^{-x_2\sqrt{1+t^2}}\cos x_1 t dt = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{(1+t^2)(x_1^2+x_2^2)}}dt, \quad x_2 > 0.$$

1.6 EQUATIONS DE TRANSPORT

Cette partie est réservée à l'étude d'une classe d'importance remarquable des équations aux dérivées partielles du 1er ordre dites *équations de transport* qui interviennent dans diverses disciplines comme la mécanique des fluides, la théorie d'électromagnétisme et l'optique géométrique ...etc.

1.6.1 *Equations de transport linéaire à vitesse constante*

Les équations de transport linéaires à vitesse constante dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$ sont données par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,\mathrm{x}) + c\cdot\nabla u(t,\mathrm{x}) = 0 & \text{si } (t,\mathrm{x}) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(t,\mathrm{x})_{|t=0} = u_0(\mathrm{x}) & \text{si } \mathrm{x}\in\mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

où t et x désignent respectivement la variable du temps et la variable spatiale.
La fonction u_0 est définie de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et c est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ de composantes strictement positives, c.-à-d. $c = (c_j)_{1\le j\le N}$ avec $c_j > 0$ pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$.

Exemple. On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère un polluant de densité initiale u_0 qui bouge avec une vitesse constante c au cours d'un écoulement d'eau dans une colonne. Alors la densité du polluant va se transporter par le flot et obéit l'équation de transport unidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,\mathrm{x}) + c\partial_x u(t,\mathrm{x}) = 0 & \text{si } (t,\mathrm{x}) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(t,\mathrm{x})_{|t=0} = u_0(\mathrm{x}) & \text{si } \mathrm{x}\in\mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Pour résoudre le problème de Cauchy (1.6.1), on procède de la même manière que la section 1, en introduisant la notion d'une courbe caractéristique associée à (1.6.1).
Plus précisément, on a :

Définition 1.6.1. *Une courbe $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$ est appelée caractéristique pour le problème de Cauchy* (1.6.1) *si et seulement si*

$$\dot{x}(t) = c. \tag{1.6.2}$$

Un autre concept qui intervient pour la résolution des équations de type (1.6.1) est celui de la dérivation le long d'une courbe donnée par la définition suivante :

Définition 1.6.2. *Soit x une courbe caractéristique associée à* (1.6.1). *Alors la dérivation le long de la courbe x pour une fonction régulière $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est exprimée comme suit :*

$$\dot{u}(t,x(t)) = \partial_t u(t,x(t)) + c\partial_x u(t,x(t)).$$

Donc d'après les définitions précédentes la résolution du problème (1.6.1) est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.6.3. *Soit $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors la solution du problème* (1.6.1) *est donnée par :*

$$u(t,x) = u_0(x - ct). \tag{1.6.3}$$

Démonstration. Soit u_0 une fonction régulière de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. Alors, en tenant compte de la définition d'une courbe caractéristique et la dérivée le long d'une courbe données respectivement par (1.6.1) et (1.6.2), on obtient le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}}(t) = c \\ \dot{u}(t,\mathrm{x}(t)) = 0. \end{cases}$$

En intégrant les deux équations sur $[0,t]$, il vient

$$\begin{cases} x_0 = x - ct \\ u(t,x) = u_0(x - ct). \end{cases}$$

D'où (1.6.3) est vérifiée. □

Remarques. (R1) *La solution u donnée par l'expression (1.6.3) dépend explicitement de la donnée initiale u_0.*

(R2) *Les courbes caractéristiques notées par $\mathscr{E}_c$ sont des droites, i.e.,*

$$\mathscr{E}_c = \{x - ct : x \in \mathbb{R}\}. \tag{1.6.4}$$

(R3) *La solution u est constante sur l'ensemble des caractéristiques $\mathscr{E}_c$.*

1.6.2 *Equations de transport linéaire à vitesse variable*

Les équations de transport linéaires à vitesse variable dans l'espace tout entier $\mathbb{R}^N$ sont données par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = 0 & \text{si } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(t,x)_{|t=0} = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.6.5}$$

D'une façon analogue on a le résultat suivant :

Proposition 1.6.4. *Soit $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors la solution du problème (1.6.1) est donnée par :*

$$u(t,x) = u_0\left(x - \int_0^t c(\tau, x(\tau))d\tau\right). \tag{1.6.6}$$

Démonstration. Soit $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors le système d'EDO caractéristique associe à (1.6.6) est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c(t, x(t)) \\ \dot{u}(t, x(t)) = 0. \end{cases}$$

En intégrant encore une fois sur $[0,t]$ on obtient

$$\begin{cases} x(t) - x_0 = \int_0^t c(\tau, x(\tau))d\tau \\ u(t, x(t)) = u(0, x_0). \end{cases}$$

Ainsi on aura

$$u(t, x(t)) = u_0\left(\int_0^t c(\tau, x(\tau))d\tau\right) \tag{1.6.7}$$

□

– **Exemple 2.** On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - tx\partial_x u(t,x) = 0 & \text{si } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(t,x)_{|t=0} = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.6.8}$$

L'équation de la courbe caractéristique est donnée par :

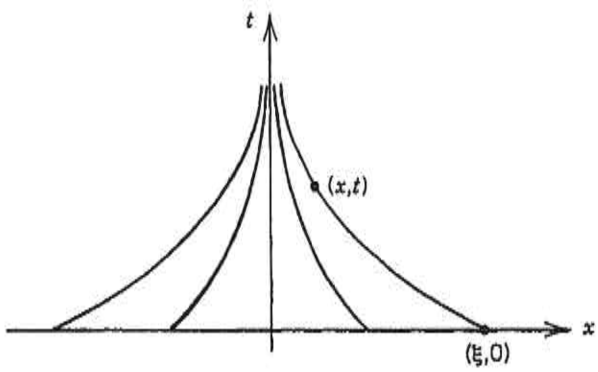
$$\dot{x}(t) = -tx(t)$$

Ainsi une intégration sur $[0,t]$ nous donne

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{x(\tau)} d\tau = -\int_0^t \tau d\tau$$

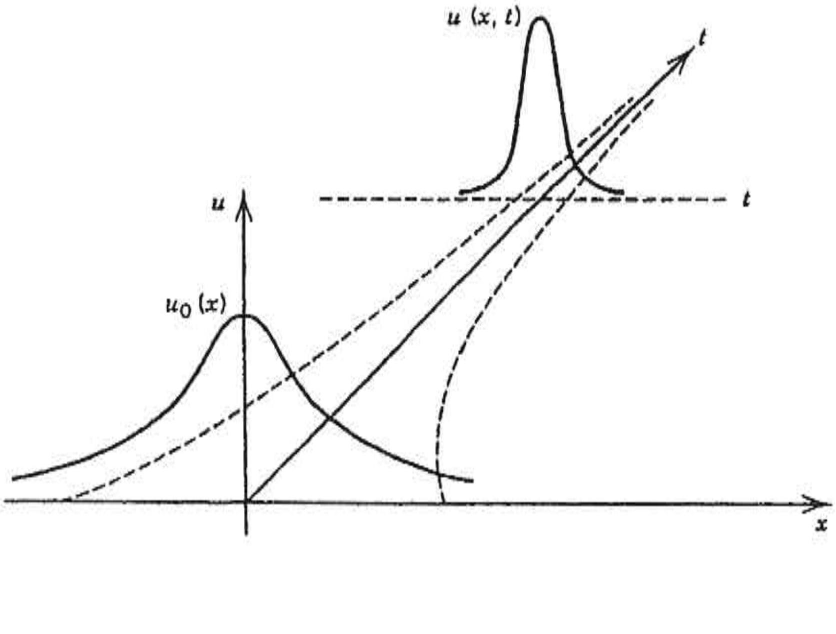
D'où il en résulte que

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t^2}{2}}.$$



Comme $u(t,x) = u_0(x_0)$, on aboutit alors à

$$u(t,x) = u_0(xe^{\frac{t^2}{2}})$$



1.6.3 *Equation de transport quasi-linéaire*

Nous commençons par le problème de Cauchy unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c(u)\partial_x u = 0 & \text{si } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \\ u(t,x)_{|t=0} = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.6.9}$$

où $c = c(u)$ est une fonction donnée dépendant de u, ici et dans cette section toute entière la donnée initiale u_0 est supposée régulière. Nous transformons (1.6.9) à la loi de conservation de base.
Plus précisément, on a :

$$\partial_t u + \partial_x(\mathbf{H}(u)) = 0, \quad c(u) = \mathbf{H}'(u),$$

où $\mathbf{H} \triangleq \mathbf{H}(u)$ désigne le flux et la non-linéarité dans (1.6.9) se produit dans le terme d'advection (transport) $c(u)\partial_x u$. L'équation (1.6.9) souvent appelée *équation d'onde cinématique*, surgit dans le phénomène d'ondes non-linéaires lorsque les effets dissipatives comme la viscosité et diffusion sont négligés.

Pour analyser le problème de Cauchy (1.6.3) supposons pour le moment qu'il admet une solution unique pour $t > 0$. Motivé par l'approche des équations aux dérivées partielles linéaire du premier ordre, définissons les courbes caractéristiques par l'équation d'EDO suivante :

$$\dot{x}(t) = c(u(t,x(t))). \tag{1.6.10}$$

Bien sûr, contrairement à la situation des EDPs linéaires, le membre droit de l'équation (1.6.10) est inconnu à priori, parce que la solution n'est pas encore déterminée. Donc nous ne pouvons pas déterminer les caractéristiques d'avance.
Comme u est constante le long des courbes données par (1.6.10), alors le problème de Cauchy (1.6.3) s'écrit comme suit :

$$\dot{u}(t) = \partial_t u + c(u)\partial_x u = \partial_t u + \dot{x}(t)\partial_x u = 0.$$

D'autre part, si nous dérivons l'équation (1.6.10) encore une fois par rapport au temps, on obtient

$$\ddot{x}(t) = \dot{c(u)} = \dot{c}(u)\dot{u}(t) = 0 \tag{1.6.11}$$

En intégrant l'équation (1.6.11) sur l'intervalle $[0,t]$ et l'on obtient

$$c(u(t,x)) = c(u_0(x_0)).$$

En tenant compte de l'identité précédente il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau &= \int_0^t c(u(\tau,x(\tau)))d\tau \\ &= \int_0^t c(u_0(x_0))d\tau \\ &= c(u_0(x_0))t. \end{aligned}$$

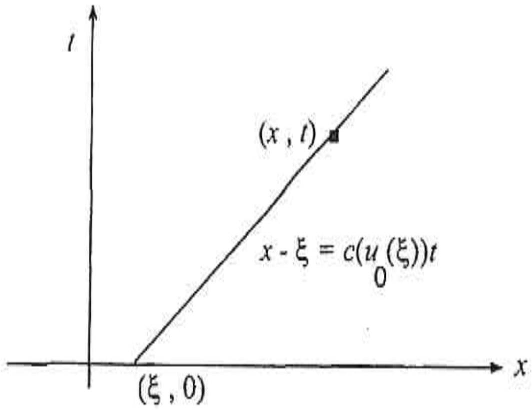
Par conséquent,

$$x(t) = x_0 + c(u_0(x_0))t$$

Donc on déduit que les caractéristiques sont des droites.
Enfin, le système caractéristique associe à (1.6.3) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c(u) \\ \ddot{x}(t) = 0. \end{cases} \tag{1.6.12}$$

Donc la solution du système (1.6.3) s'écrit comme suit :



$$u(t,x) = u_0(x - c(u_0(x_0)t).$$

Ainsi, le théorème principal s'énonce comme suit :

Théorème 1.6.5. *Soient c et u_0 deux fonctions de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Supposons que c et u_0 sont des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$ en même temps. Alors le problème de Cauchy (1.6.3) admet une unique solution définie implicitement par les équations paramétriques suivantes :*

$$\begin{cases} u(t,x) = u_0(x_0) \\ x - x_0 = c(u(x_0))t. \end{cases} \tag{1.6.13}$$

Démonstration. On doit vérifier que l'expression donnée par (1.6.15) est une solution de (1.6.11). Un calcul classique des dérivées partielles nous donne :

$$\partial_t u = \dot{u}_0(x_0)\partial_t x_0, \quad \partial_x u = \dot{u}_0(x_0)\partial_x x_0. \tag{1.6.14}$$

En calculant implicitement les dérivées partielles $\partial_t x_0$ et $\partial_x x_0$ on aboutit à

$$\begin{aligned} -\partial_t x_0 &= \dot{c}(u_0(x_0)\dot{u}_0(x_0)\partial_t x_0)t + c(u_0(x_0)) \\ 1 - \partial_x x_0 &= \dot{c}(u_0(x_0)\dot{u}_0(x_0)\partial_x x_0)t. \end{aligned}$$

En substituant dans les expressions $\partial_t u$ et $\partial_x u$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\frac{c(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)}{1 + \dot{c}(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)t} \\ \partial_x u &= \frac{\dot{u}_0(x_0)}{1 + \dot{c}(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)t}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\partial_t u + c(u)\partial_x u = -\frac{c(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)}{1+\dot{c}(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)t} + \frac{c(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)}{1+\dot{c}(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)t} = 0$$

Pour que la solution soit bien définie il faut et il suffit que

$$1+\dot{c}(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)t \neq 0.$$

Mais t et 1 sont positifs, donc on doit supposer que $\dot{c}$ et $\dot{u}_0$ sont de même signes, et alors $1+\dot{c}(u_0(x_0))\dot{u}_0(x_0)t > 0$.
Ce qui achève la démonstration. □

–Exemple. Considérons le problème de Cauchy (équation de Burger) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ u(x,0) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{1.6.15}$$

Dans ce cas les fonctions c et u_0 sont données par :

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c(x) = x, \quad u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{1.6.16}$$

Il est facile de vérifier que c et u_0 sont de classe C^1 et croissantes en même temps. Alors, d'après (1.6.15) et la définition de u_0, le système caractéristique d'EDO associe à (1.6.15) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c(u(x(t),t)) = u((x(t),t) \\ \ddot{x}(t) = c(u(x(t),t)) = u((x(t),t) \\ c(u(t,x) = c(u_0(x_0)) = u_0(x_0) \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} c(u(x(t),t)) = u_0(x_0) = 0 & \text{si } x_0 \leq 0 \\ c(u_0(x_0)) = e^{-\frac{1}{x_0}} & \text{si } x_0 \geq 0 \end{cases}$$

Finalement la solution de l'EDP (1.6.15) s'écrit comme suit

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x_0 + te^{-\frac{1}{x_0}} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

où $x_0 = x - te^{-\frac{1}{x_0}}$.

1.7 EXERCICES

Exercice 1. (La formule de D'Alembert)
(I) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial^2_{t^2} u - c^2 \partial^2_{x^2} u = 0 & \text{si } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty[\\ u_{|t=0}(x) = \varphi(x), \quad \partial_t u_{|t=0}(x) = \psi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.7.1}$$

où φ, ψ sont deux fonctions régulières ($\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2), \psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $c > 0$ désigne la vitesse de l'onde.

(1) Montrer que
$$\partial^2_{t^2} u - c^2 \partial^2_{x^2} u = (\partial_t u - c\partial_x u)(\partial_t u + c\partial_x u). \tag{1.7.2}$$

(2) Déduire que
$$\partial_t u - c\partial_x u = 0, \quad \partial_t u - c\partial_x u = 0.$$

(3) Résoudre les équations données par les expressions (1.7.2).

(II) On considére le changement de variables
$$X(t,x) = x + ct, \quad Y(t,x) = x - ct.$$

(1) Donner la forme canonique du problème (1.7.2).

(2) Montrer que la solution générale du problème (1.7.2) est donnée par
$$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct),$$
où f et g sont deux fonctions arbitraires de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(3) A partir des conditions initiales du problème (1.7.2), déduire les valeurs des fonctions f et g.

(4) Donner l'expression explicite de la solution u du problème (1.7.1).

(5) Montrer que si φ et ψ sont impaires alors $u(0,t) = 0$.

(6) Montrer que si φ et ψ sont paires alors $\partial_x u(0,t) = 0$.

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} \partial_t u + 2t\partial_x u = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre le problème de la valeur initiale suivant :
$$\begin{cases} \partial_t u - x^2\partial_x u = 0 & \text{si } x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ u(0,t) = 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Considérons le problème de la valeur initiale
$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = 0 & \text{si } x \subset \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = -x & \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Discuter le diagramme des caractéristiques.

(2) Trouver la solution.

Exercice 5. Résoudre l'équation d'advection non locale
$$\begin{cases} \partial_t u + \left(\int_0^1 F(u(\xi,t))d\xi\right)\partial_x u = 0 & \text{si } 0 < x < 1,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x) & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Exercice 6. Soit $u(x,t)$ une solution du problème de Cauchy

$$\partial_t u + c\partial_x u + u^2 = 0, \quad u(0,x) = x,$$

où c est une constante, t et x désignent respectivement le temps et la variable spatiale.

(1) Résoudre le problème.

(2) Supposons qu'une personne est localisée au point x_0 à l'instant $t = 0$, et bouge dans la direction $x-$positive avec la vitesse c (c.-à-d. la quantité $x - ct$ est fixée pour lui). Montrer que si $x_0 > 0$, alors la solution vue par la personne se rapproche vers 0 lorsque $t \to \infty$.

Exercice 7. Résoudre le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = -ku^2 & \text{si } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où k est une constante positive.
Discuter les caractéristiques.

2

EQUATION DE LAPLACE-POISSON

2.1 INTRODUCTION

Plusieurs phénomènes de la physique mathématique se réduisent aux équations elliptiques du second ordre, avec leurs problèmes aux limites.
Dans ce chapitre on va s'occuper de quelques aspects récents de la théorie mathématique sous-jacente pour un niveau modéré.

2.2 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Définition 2.2.1. *Soit Ω un domaine (ouvert) non vide de $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}$. Soit*

$$\{a_{ij}\}_{1\leq i,j\leq N} \subset \mathbf{C}(\Omega), \quad \{a_k\}_{1\leq k\leq N} \subset \mathbf{C}(\Omega), \quad a \in\subset \mathbf{C}(\Omega) \tag{2.2.1}$$

avec

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega,\ i,j \in \{1,\dots,N\}. \tag{2.2.2}$$

Alors l'opérateur $\mathbf{P}(\partial)$,

$$\mathbf{P}(\partial)u(x) \triangleq -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + a(x)u(x), \tag{2.2.3}$$

du second ordre est appelé elliptique s'il existe une constante $E > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^N$ la condition d'ellipticité

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2 \tag{2.2.4}$$

est satisfaite.

Remarque. *Dans autres contextes $\mathbf{P}(\partial)$ est appelé opérateur elliptique si la constante C qui apparait dans l'expression (2.2.4) ne dépend pas de $x \in \Omega$.*

Exemple. L'exemple le plus distingué est

$$-\Delta = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial_j^2}{\partial x_j^2} \tag{2.2.5}$$

où Δ est l'opérateur du Laplace. Nous adaptons la convention usuelle pour appeler simplement que (2.2.5) est un Laplacien.

Remarque. *La remarque suivante sera utile dans la suite.*

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi) \in \mathbb{C}, \quad \xi_j = \mathrm{Re}\xi_j + i\mathrm{Im}\xi_j = \varrho_j + i\zeta_j,$$

où $\varrho_j, \zeta_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\ldots,N$. *Alors*

$$\overline{\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_j\overline{\xi_k}} = \sum_{j,k=1}^{N} \overline{a_{jk}}(x)\overline{\xi_j}\xi_k = \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_j\overline{\xi_k} \tag{2.2.6}$$

est un réel. Et donc on a

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_j\overline{\xi_k} &= \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)(\varrho_j + i\zeta_j)(\varrho_k - i\zeta_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)(\varrho_j\varrho_k + \zeta_j\zeta_k) \\ &\geq C|\xi|^2 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Donc la condition d'ellipticité (2.2.4) *avec* $\overline{\xi_j}$ *à la place de* ξ_j *reste la même.*

2.2.1 *Problèmes typiques*

Soient Ω un domaine borné de classe $\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^k$ ou $\mathbf{C}^\infty$ et $\mathbf{P}(\partial)$ un opérateur elliptique.
Et soient f et φ deux fonctions définies respectivement sur Ω et $\partial\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Problème de Dirichlet. Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui satisfait au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\partial)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\sigma) = \varphi(\sigma) & \text{si } \sigma \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Problème de Neumann. Le problème de Neumann consiste à trouver une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ satisfaisant au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\partial)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial\nu}u(\sigma) = \varphi(\sigma) & \text{si } \sigma \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Exercice. Déterminer un domaine Ω dans lequel l'opérateur suivant :

$$\mathbf{P}(\partial)u(x_1, x_2) = -\partial^2_{x_1}u(x_1, x_2) - x_2\partial^2_{x_2}u(x_1, x_2)$$

est elliptique.

2.3 SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES ET REPRÉSENTATION INTÉGRALES

Dans cette section nous aborderons en premier lieu la notion de Solutions Élémentaires pour le Laplacien en exploitant les propriétés des fonctions radiales symétriques et leurs relations avec le Laplacien.
En deuxième lieu, nous donnerons une solution explicite pour l'équation de Poisson dite Représentation Intégrale de Green.

Définition 2.3.1. *Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite radiale symétrique si est seulement si $u(x) = u(r)$, avec $r = |x|$.*

Proposition 2.3.2. *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction radiale symétrique vérifiant l'équation du Laplace, c'est -à-dire*

$$\Delta u(x) = 0.$$

Alors l'assertion suivante est satisfaite

$$\ddot{u}(r) + \frac{1-N}{r}\dot{u}(r) = 0. \tag{2.3.1}$$

Démonstration. Comme u est radiale symétrique, alors un calcul classique de la dérivée d'une fonction composée nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}u(\mathrm{x}) &= \frac{\partial r}{\partial x_j}\dot{u}(r) \\ &= \frac{x_j}{r}\dot{u}(r), \quad j = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\mathrm{x}) = \ddot{u}(r)\frac{x_j^2}{r^2} + \dot{u}(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right)$$

En sommant sur l'indice j, nous obtenons

$$\ddot{u}(r) + \frac{1-N}{r}\dot{u}(r) = 0.$$

□

Exercice. Montrer que les solutions de (2.3.1) sont données comme suit :

$$u(r) = \begin{cases} c_1 r + c_2 & \text{si } N = 1 \\ c_1 \ln r + c_2 & \text{si } N = 2 \\ c_1 r^{2-N} + c_2 & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

A ce stade, nous allons introduire les solutions élémentaires du Laplacien Δ

Définition 2.3.3. *Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geq 2$ et $\Phi \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta\Phi(x) = 0$, $x \in \Omega$. Alors pour tout $y \in \Omega$*

$$E_y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x-y| + \Phi(x) & si\ N = 1 \\ -\frac{1}{2\pi}|x-y| + \Phi(x) & si\ N = 2 \\ -\frac{1}{(2-N)|\omega_N|}|x-y| + \Phi(x) & si\ N \geq 3. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

sont appelées les solutions élémentaires ou fondamentales du Laplacien Δ.

Remarques 2.3.4. (R1) *La quantité $|\omega_N|$ désignant la mesure de la sphère unité*

$$\mathbb{S}_{N-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \ldots x_N^2 = 1\}$$

est donnée par l'expression suivante :

$$|\omega_N| = \frac{2\sqrt[N]{\pi}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)},$$

où Γ est la fonction Gamma définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Comme cas particulier, $|\omega_2| = 2\pi$ et $|\omega_3| = 4\pi$.

(R2) *Suivant les considérations ci-dessus on a :*

$$\Delta E_y(x) = 0 \text{ dans } \Omega \backslash \{y\}.$$

(R3) *Les solutions élémentaires définies ci-dessus vérifient la relation suivante :*

$$\Delta E_y(x) = \delta_y$$

au sens des distributions avec δ_y représente la masse de Dirac en y.

La solution de l'équation de Poisson $\Delta u(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$ est donnée par l'expression intégrale suivante.

Théorème 2.3.5 (Formule de représentation intégrale de Green). *Soient $N \geq 2$ et Ω un domaine borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$.*
Pour $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$. Alors on a :

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(E_y(x') \frac{\partial}{\partial \nu} u(x') - u(x') \frac{\partial}{\partial \nu} E_y(x') \right) d\sigma(x') - \int_{\Omega} u(x) E_y(x) dx, \tag{2.3.3}$$

où $x' = (x'_1, \ldots, x'_N) \in \mathbb{R}^N$ et $d\sigma(x')$ désigne la mesure surfacique sur $\partial\Omega$.

Démonstration. On procède par étapes.

Etape 1. Nous appliquons la formule intégrale de Green (2.7.3) pour Φ et u on obtient

$$\int_{\Omega} u(\mathrm{x}) \Delta\Phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x} - \int_{\Omega} \Phi(\mathrm{x}) \Delta u(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(\mathrm{x}') \frac{\partial}{\partial \nu} u(\mathrm{x}') - u(\mathrm{x}') \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\mathrm{x}') \right) d\sigma(\mathrm{x}'). \tag{2.3.4}$$

Mais $\Delta\Phi(\mathrm{x}) = 0$ sur Ω, alors l'identité précédente devient comme suit :

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathrm{x}) \Delta u(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(\mathrm{x}') \frac{\partial}{\partial \nu} u(\mathrm{x}') - u(\mathrm{x}') \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\mathrm{x}') \right) d\sigma(\mathrm{x}').$$

Donc il suffit de démontrer (2.3.3) pour $\Phi = 0$. De plus on peut supposer que $\mathrm{y} = 0 \in \Omega$.

Etape 2. Soit $N \geq 3$, alors vu que $\Phi = 0$ et $y = 0$ la solution élémentaire (2.3.3) s'écrit comme suit :

$$E_0(x) = \frac{1}{(N-2)|\omega_N||x|^{N-2}}. \tag{2.3.5}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on note par $B(0,\varepsilon)$ la boule centrée à l'origine et de rayon ε dans Ω. Nous appliquons encore une fois la formule de Green (2.7.3) pour u à la place de g et E_0 à la place de f pour le domaine $\Omega \backslash B(0,\varepsilon)$ qui est de classe $\mathbf{C}^1$ on aboutit à

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)E_0(x)dx &= \int_{\partial\Omega}\left(u(x')\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x')u(x') - E_0(x')\frac{\partial u}{\partial\nu}(x')\right)d\sigma(x') \\ &\quad - \int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(u(x')\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x')u(x') - E_0(x')\frac{\partial u}{\partial\nu}(x')\right)d\sigma(x').\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

D'autre part, en vertu du fait que $\mathbf{B}(\mathbb{R}^N) \ni \Omega \mapsto \int_\Omega \cdot dx$ est une mesure positive, où $\mathbf{B}(\mathbb{R}^N)$ désigne la tribu de Borel il vient

$$\int_\Omega u(x)E_0(x)dx = \int_{\Omega\backslash B(0,\varepsilon)} u(x)E_0(x)dx + \int_{B(0,\varepsilon)} u(x)E_0(x)dx.$$

Or, le théorème de convergence de Lebesgue nous fournit

$$\left|\int_{B(0,\varepsilon)} u(x)E_0(x)dx\right| \leq C\varepsilon^2,$$

de sorte que le membre gauche de (2.3.6) tend vers le dernier terme de l'identité (2.3.3). Donc l'identité (2.3.6) prend la forme,

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega\backslash B(0,\varepsilon)} u(x)E_0(x)dx &= \int_{\partial\Omega}\left(u(x')\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x')u(x') - E_0\frac{\partial(x')u}{\partial\nu}(x')\right)d\sigma(x') \\ &\quad - \int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(u(x')\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x')u(x') - E_0(x')\frac{\partial u}{\partial\nu}(x')\right)d\sigma(x').\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

En comparant la formule (2.3.7) avec (2.3.3), il nous reste à démontrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(u(x')\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x')u(x') - E_0(x')\frac{\partial u}{\partial\nu}(x')\right)d\sigma(x') = u(0).$$

Pour cette raison, de (2.3.5) il s'ensuit

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u(x')\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x')u(x')d\sigma(x')\right| &\leq \frac{1}{(N-2)|\omega_N|\varepsilon^{N-2}}\int_{|x'|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x')d\sigma(x') \\ &\leq \frac{C}{(N-2)|\omega_N|}\int_{|x'|=\varepsilon}d\sigma(x') \\ &= C\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0,\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

où, on a utilisé le fait que $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ est continue sur le compact $|x'| = \varepsilon$. De plus, un calcul classique des dérivées partielles nous donne

$$\frac{\partial E_0}{\partial\nu}(x') = -\frac{1}{|\omega_N||x'|^{N-1}} = \frac{1}{|\omega_N|\varepsilon^{N-1}}, \quad x' \in \partial B(0,\varepsilon).$$

Pour le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u(x')\frac{\partial E_0}{\partial \nu}(x')d\sigma(x') &= \frac{1}{|\omega_N|\varepsilon^{N-1}}\int_{|x'|=\varepsilon} u(0)d\sigma(x') \\
&\quad + \frac{1}{|\omega_N|\varepsilon^{N-1}}\int_{|x'|=\varepsilon} (u(x')-u(0))d\sigma(x') \\
&= u(0) + \frac{1}{|\omega_N|\varepsilon^{N-1}}\int_{|x'|=\varepsilon} (u(x')-u(0))d\sigma(x').
\end{aligned}$$

Puisque u est continue, alors la valeur absolue du dernier terme est bornée par :

$$\frac{1}{|\omega_N|\varepsilon^{N-1}} \sup_{|x'|=\varepsilon} |u(x')-u(0)| \left| \int_{|x'|=\varepsilon} d\sigma(x') \right| = \sup_{|x'|=\varepsilon} |u(x')-u(0)| \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0. \quad (2.3.9)$$

En combinant (2.3.8) et (2.3.9), on obtient exactement la formule intégrale (2.3.3) □

Remarque. *Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors la fonction u en y est donnée par un produit de convolution entre E_y et et le terme source f, c'est à dire*

$$u(y) = (E_y \star f)(y) = \int_{\mathbb{R}^N} E_y(x)f(x)dx.$$

Pour plus de détails veuillez consulter le livre de H. Brezis [3].

2.4 FONCTION DE GREEN

Les problèmes aux limites de type (2.2.8) et (2.2.9) sont l'épine dorsale de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. La *représentation intégrale* donnée par le théorème (2.3.5) donne une première impression de la solution de $\Delta u = f$ dans Ω et le comportement de u le long de la frontière déterminée $\partial\Omega$. Cependant, comparée avec (2.2.8), (2.2.9) où $\mathbf{P}(\partial) = -\Delta$, il semble être souhaitable de simplifier la première intégrale du membre droit de la formule (2.3.3), i.e., pour avoir seulement le terme avec $u(x')$ sur $\partial\Omega$, ou seulement le terme avec $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur $\partial\Omega$ dans (2.3.3). Dans le cas du problème de Dirichlet (2.2.8) il faut éliminer le premier terme dans l'intégrale le long de $\partial\Omega$ dans (2.3.3). En choisissant Φ dans la définition 2.3.3 dans le sens qu'on a $E_y(x') = 0$ pour $x' \in \partial\Omega$.

L'idée est d'introduire pour $\mathbf{y}$ fixé la fonction *correcteur* ϕ_y, solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta\phi_y(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \phi_y(x') = E_y(x') & \text{si } x' \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Ainsi la formule intégrale de Green (2.7.3) pour u et ϕ_y nous fournit

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \phi_y(x)\Delta u(x)dx &= \int_{\partial\Omega} \left(u(x')\frac{\partial\phi_y}{\partial\nu}(x') - \phi_y(x')\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \right) d\sigma(x') \quad (2.4.2) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(u(x')\frac{\partial\phi_y}{\partial\nu}(x') - E_y(x')\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \right) d\sigma(x').
\end{aligned}$$

A ce stade, nous allons introduire la notion de la fonction de Green.

Définition 2.4.1. *Soient Ω un domaine de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ et $y \in \Omega$. La fonction de Green pour le domaine Ω est définie par $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto G(x,y)$ et*

$$G(x,y) = E_y(x) - \phi_y(x), \quad x \neq y. \tag{2.4.3}$$

Remarques. (R1) *On voit que G est une fonction à 2N variables.*

(R2) *En adoptant cette terminologie et en mettant ensemble l'expression de u et l'identité* (2.4.2), *on obtient*

La fonction de Green est caractérisée par la propriété de symétrie suivante :

Théorème 2.4.2. *Pour tout $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, $x \neq y$ on a*

$$G(x,y) = G(y,x). \tag{2.4.4}$$

Démonstration. Soit $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \Omega$ fixés. Posons $v(\mathrm{y}) = G(\mathrm{x}_0, \mathrm{y})$, $\omega(\mathrm{y}) = G(\mathrm{y}, \mathrm{x}_0), \mathrm{y} \in \Omega$.
Alors $\Delta v(\mathrm{y}) = 0$ *si*$(\mathrm{x}_0 \neq \mathrm{y})$, $\Delta\omega(\mathrm{y}) = 0$ *si*$(\mathrm{x}_0 \neq \mathrm{y})$ *et* $v = \omega = 0$ *sur* $\partial\Omega$.
Ainsi , la formule de Green pour le domaine borné $\Omega \backslash [B(\mathrm{x}_0, \epsilon) \cup B(\mathrm{x}, \epsilon)]$ nous donne

$$\int_{\partial B(\mathrm{x}_0,\varepsilon)} \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\omega - \frac{\partial \omega}{\partial \nu} v\right] d\sigma(\mathrm{x}') = \int_{\partial B(\mathrm{x}_0,\varepsilon)} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu}\omega\right] d\sigma(\mathrm{x}'), \tag{2.4.5}$$

où ν est le vecteur normal sortant par rapport à $\partial B(\mathrm{x}_0, \varepsilon) \cup \partial B(\mathrm{x}, \varepsilon)$.
D'autre part ;

$$\mid \int_{\partial B(\mathrm{x}_0,\epsilon)} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} v d\sigma(\mathrm{x}') \mid \leq \sup_{\partial B(\mathrm{x}_0,\epsilon)} \mid v \mid \int_{\partial B(\mathrm{x}_0,\epsilon)} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} d\sigma(\mathrm{x}') \tag{2.4.6}$$

□

EXEMPLES. Dans les exemples ci-dessous, nous allons construire la fonction de Green pour deux domaines qui ont une simple géometrie. Nous commençons par le demi plan $\mathbb{R}^N_+$ puis la boule unité $B(0,1)$.

◇ **Fonction de Green du demi-espace $\mathbb{R}^N_+$.** Rappelons que

$$\mathbb{R}^N_+ = \{\mathrm{x} = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

On va résoudre le problème (2.2.8) pour le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$, en posant

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) &= E_{\mathrm{y}^*}(\mathrm{x}) \\ &= E(x_1 - y_1^*, \ldots, \mathrm{x}_{N-1} - y_{N-1}^*, x_N + y_N^*) \end{aligned}$$

L'idée est que la fonction correcteur ϕ est construite à partir de E_{y} par réflexion de singularité de y à $\mathrm{y}^* \notin \mathbb{R}^N_+$. Alors on peut vérifier aisément que ϕ une solution du problème aux limites suivants :

$$\begin{cases} \Delta\phi_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) = 0 & \text{si } \mathrm{x} \in \mathbb{R}^N_+ \\ \phi(\mathrm{x}') = E_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}') & \text{si } \mathrm{x}' \in \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

Ensuite nous avons la définition suivante :

Définition 2.4.3. *Soit $y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^N_+$. Alors son point de réflexion dans le demi-espace $\partial\mathbb{R}^N_+$ est défini par*

$$y^* = (y', -y_N)$$

Définition 2.4.4. *La fonction de Green pour le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$ est définie par :*

$$G(x, y) = E_y(x) - E_{y^*}(x), \quad x, y \in \mathbb{R}^N_+;\ x \neq y.$$

Exemple. Considérons le problème aux limites dans le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N_+ \\ u(\mathbf{x}') = \phi(\mathbf{x}') & \text{sur } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

On sait que

$$\partial\mathbb{R}^N_+ = \{\mathbf{x} = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N :\ x_N = 0\} \tag{2.4.7}$$

et le vecteur normale est défini par $\nu = (0, ..., 0, -1)$, voir l'appendice (2.6.3) . Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial G}{\partial x_N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= -\frac{\partial E_{\mathbf{y}}}{\partial x_N}(\mathbf{x}) + \frac{\partial E_{\mathbf{y}^*}}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{\mid \omega_N \mid}\left(\frac{x_N - y_N}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^N} - \frac{x_N + y_N}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^N}\right) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Par conséquent, si $\mathbf{x} \in \partial\mathbb{R}^N_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-2y_N}{\mid \omega_N \mid}\frac{1}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^N}$$

(On prend en considération le fait que $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \| \mathbf{x} - \mathbf{y}^* \|$)
En remplaçant cette expression dans (2.3.3), on déduit que

$$u(\mathbf{y}) = \frac{2x_N}{\mid \omega_N \mid}\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{\phi(\sigma)}{\| \mathbf{x} - \mathbf{x}' \|^N} d\sigma(\mathbf{x}'), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N_+. \tag{2.4.9}$$

est une solution du problème (2.4.7).

Définition 2.4.5 (Noyau de Poisson). *La fonction à deux variables définie par :*

$$K(x, y) = \frac{2x_N}{\mid \omega_N \mid}\frac{1}{\| x - y \|^N}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N_+ \tag{2.4.10}$$

est dite noyau de Poisson.

D'aprés ce qui précède on a le résultat suivant :

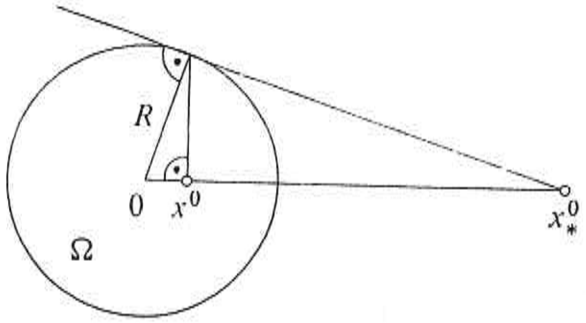
Théorème 2.4.6 (La formule de Poisson). *Supposons que $\phi \in C(\mathbb{R}^{N-1}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$ et déffinissons u par (2.4.9). Alors on a*
(1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N_+)$.
(2) $\Delta u(x) = 0$ *dans* $\mathbb{R}^N_+$.
(3) $\lim_{x \to x',\, x' \in \mathbb{R}^N_+} u(x) = \phi(x')$ *pour tout* $x' \in \partial\mathbb{R}^N_+$.

2.4.1 *Fonction de Green pour la boule unité $B(0,1)$*

Définition 2.4.7. *Soit $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, le vecteur*

$$y^* = \frac{y}{\| y \|^2}$$

est dit point dual (ou point de réflexion) de y par rapport à $\partial B(0,1)$.



Remarque. *Si $y \in B(0,1), y \neq 0$, alors $\| y^* \| > 1$ et donc $y^* \notin B(0,1)$.*

Pour $\mathrm{y} \in B(0,1)$ fixé, rappelons qu'il fallait obtenir la fonction correcteur ϕ_{x_0} solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta\phi_y(x) = 0 & \text{si } x \in B(0,1) \\ \phi_y = E_y & \text{si } x' \in \partial B(0,1) \end{cases} \tag{2.4.11}$$

Or, la fonction de Green est définie par :

$$G(x,y) = E_y(x) - \phi_y(x).$$

L'idée consiste à inverser la singularité de $x \in B(0,1)$ à $y^* \notin B(0,1)$. Supposons pour le moment que $N \geq 3$. On sait que

$$x \mapsto E_y(x)$$

vérifiant $\Delta E_y(x) = 0$ si $x \neq y$. Ainsi la fonction

$$x \mapsto | x |^{2-N} E_{y^*}(x)$$

l'est aussi. Donc $\phi_y(x)\phi(\| y \| (x - y^*))$ vérifie $\Delta\phi_y(x) = 0$.
De plus, si $x \in \partial B(0,1)$ et $x \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} \| y \|^2 \| x - y^* \|^2 &= \| y \|^2 \left(\| x \|^2 - \frac{2y}{\| x \| 2} + \frac{1}{\| y \|^2} \right) \\ &= \| y \|^2 - 2 < x, y > +1 \\ &= = \| x - y \|^2 . \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

D'où

$$(\| x \| \| x - y^* \|)^{2-N} = \| x - y \|^{2-N} \tag{2.4.13}$$

Par conséquent

$$\Phi_y(x) = E_y(x), \quad x \in \partial B(0,1).$$

D'où on a :

Définition 2.4.8. *La fonction de Green pour la boule unité est définie par*

$$G(x,y) = E_y(x) - E_{x_0^*}(\| y \| x), \quad x, y \in B(0,1), \ x \neq y. \tag{2.4.14}$$

Application. Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in B(0,1) \\ u(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y}) & \text{si } \mathbf{y} \in \partial B(0,1). \end{cases} \tag{2.4.15}$$

Par le théorème de représentation intégrale de Green on a :

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(0,1)} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}). \tag{2.4.16}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\partial E_{\mathbf{y}}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial E_{\mathbf{y}}}{\partial x_i}(\| \mathbf{y} \| \mathbf{x}) \\ \frac{\partial E_{\mathbf{x}_0}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{| \omega_N |} \frac{x_i \| \mathbf{y} \|^2 - y_i}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^N} \\ &= \frac{1}{| \omega_N |} \frac{y_i - x_i \| \mathbf{y} \|^2}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^N} \; si \; \mathbf{x} \in \partial B(0,1), \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

en conséquence

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1,N} x_i \frac{\partial G}{\partial \nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{| \omega_N |} \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2}. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Enfin

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - \|\mathbf{y}\|^2}{| \omega_N |} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\phi(\mathbf{y})}{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2} d\sigma(\mathbf{y}). \tag{2.4.19}$$

2.5 EXERCICES

Exercice 1. Montrer le théorème 2.3.5 pour les solutions élémentaires $E_{\mathbf{y}}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $N = 2, R > 0$ et $\Omega = B(0,R)$ la boule centrée à l'origine est de rayon $R > 0$.

(1) Justifier le Figure pour le point de réflexion $\mathbf{y} = \mathbf{y}^* \frac{R^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$ de $\mathbf{y} \in \Omega \backslash \{0\}$.

(2) Soient $\mathbf{y} \in \Omega$ et $\mathbf{y}^* = \mathbf{y} \frac{R^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$ pour $\mathbf{y} \neq 0$. Montrer que

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \begin{cases} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*\| + \ln \frac{R}{\|\mathbf{y}\|} & \text{si } \mathbf{y} \neq 0, \\ \ln \|\mathbf{x}\| - \ln R, & \text{si } \mathbf{y}=0, \end{cases}$$

est la fonction de Green dans le cercle Ω.

Exercice 3. Utiliser le calcul classique des dérivées pour construire une solution explicite du problème aux limites suivant :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

pour deux cas différent :
- $\alpha = \beta = 0$,
- $\alpha, \beta \neq 0$.

Exercice 4. Supposons que u est une solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N \times]0, \infty[. \tag{2.5.1}$$

(1) Montrer que $u_\lambda(\mathrm{x}, t) = u(\lambda \mathrm{x}, \lambda^2 t)$ est une solution de l'équation (2.5.1) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Utiliser (1) pour montrer que $v(\mathrm{x}, t) = \mathrm{x} \cdot \nabla u(\mathrm{x}, t) + 2t\partial_t u(\mathrm{x}, t)$ est encore solution de (2.5.1).

Exercice 5. Supposons que $N = 1$ et $u(\mathrm{x}, t) = v\left(\frac{\mathrm{x}^2}{t}\right)$.

(1) Montrer que

$$\partial_t u = \partial^2_{\mathrm{x}^2} u$$

si et seulement si

$$4zv''(z) + (2 + z)v'(z) = 0, \quad z > 0. \tag{2.5.2}$$

(2) Montrer que la solution générale de (2.5.2) est donnée par :

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds.$$

(3) Différentier $v\left(\frac{\mathrm{x}^2}{t}\right)$ par rapport à x et sélectionner proprement la constante c, afin d'obtenir la solution fondamentale E pour $N = 1$.

2.6 APPENDICE

Dans cette section, nous allons rappeler quelques définitions concernant la géométrie d'un domaine Ω, autrement dit la régularité du bord ou la frontière notée par $\partial\Omega$ exigée pour donner un sens aux formules d'intégrales déjà évoqués dans la section précédente.

2.6.1 *Régularité des domaines.*

Définition 2.6.1. (i) *Soient $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$. Un domaine special Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit de classe de classe $\mathbf{C}^k$ ou parfois de régularité $\mathbf{C}^k$ si et seulement si pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, ils existent $r = r(x_0)$ et une fonction γ de classe $\mathbf{C}^k$ telles que $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_N > \gamma(x')\}. \tag{2.6.1}$$

(ii) *Soient $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$. Si Ω est de classe $\mathbf{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors on dit que Ω est de classe $\mathbf{C}^\infty$.*

(iii) *Si $N = 1$, alors un domaine de classe $\mathbf{C}^k$ est tout simplement un intervalle ouvert borné.*

– EXEMPLES.

(1) L'exemple prototype d'un domaine borné de classe $\mathbf{C}^k$ est la boule ouverte, comme exemple la boule unité $B(0,1)$, alors sa frontière est la sphère unité, c'est à dire

$$\partial B(0,1) = \mathbb{S}_{N-1} = \{\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

(2) Le deuxième exemple est le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$, on a

$$\partial \mathbb{R}^N_+ = \{\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}.$$

On voit clairement que sa frontière est la droite horizontale $x_N = 0$.

Le vecteur normal joue un rôle d'importance remarquable dans les orientations des surfaces, en particulier la frontière (hypersurface) des domaines de régularité appropriée. A ce propos, nous avons la définition suivante :

Définition 2.6.2. *Soit Ω un domaine borné de classe $\mathbf{C}^1$. La vecteur normale unitaire sortant vers l'extérieur associe à $\partial\Omega$ est défini par*

$$\nu(x') = \frac{(\partial_{x_1}\gamma(x'), \ldots, \partial_{x_{N-1}}\gamma(x'), -1)}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \partial_{x_j}\gamma(x')}}, \tag{2.6.2}$$

où la fonction γ est donnée par la définition 2.6.1.

Pour illustrer les définitions ci dessus, nous essayons d'aborder quelques exemples des domaines réguliers pour calculer d'une façon explicite le vecteur normal unitaire.

(1) Le vecteur normal unitaire pour le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$. Rappelons que le demi-espace $\mathbb{R}^N_+$ est défini par

$$\mathbb{R}^N_+ = \{\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_N) : x_N > 0\}$$

On sait que

$$\partial \mathbb{R}^N_+ = \{\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$$

Alors la fonction γ dans ce cas est définie comme suit :

$$x_N = \gamma(x') = 0, \quad \gamma'(x') = 0 \text{ et } \partial_{x_j}\gamma(x') = 0, \quad j = \{1, \ldots, N-1\}.$$

Ainsi le vecteur normal associe à $\partial\mathbb{R}^N_+$ prend la forme

$$\nu(\mathbf{x}') = (0, \ldots, 0, -1). \tag{2.6.3}$$

(2) Le vecteur normal pour la boule unité $B(0,1)$. Rappelons que

$$B(0,1) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \ldots + x_N^2 < 1\},$$

ainsi

$$\partial B(0,1) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \ldots + x_N^2 = 1\}$$

La fonction γ, ainsi définie sur $\mathbb{R}^{N-1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$x_N = \gamma(\mathbf{x}') = 1 - \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{N-1}^2}.$$

Un calcul directe des dérivées partielles nous donne :

$$\partial_{x_j}\gamma(\mathbf{x}') = -\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{N-1}^2}}, \quad j \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

Par conséquent,

$$\nu(\mathbf{x}') = \frac{\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{N-1}^2}}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{N-1}^2}}, -1\right)}{\sqrt{1 + \frac{\sum_{j=1}^{N-1} x_j^2}{(x_1^2+\ldots+x_{N-1}^2)}}}.$$

Enfin

$$\nu(\mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_1}{\|\mathbf{x}'\|}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{\|\mathbf{x}'\|}, -1\right). \tag{2.6.4}$$

2.7 LES FORMULES INTÉGRALES

Dans cette section, nous allons présenter quelques formules intégrales suivant Green pour pouvoir résoudre le problème de Laplace ou Poisson sous des conditions de (2.2.8) ou (2.2.9). Pour cette raison, soit Ω un domaine borné de classe $\mathbf{C}^1$

Définition 2.7.1. *Soient Ω un domaine borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$ et f une fonction dans $C^1(\Omega)$. Alors la dérivée normale en $x' \in \partial\Omega$*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x') = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j'} f(x') d\sigma(x'), \tag{2.7.1}$$

où $d\sigma(x')$ est la mesure surfacique sur $\partial\Omega$.

Théorème 2.7.2 (Formule de Gauss). *Soient* $N \geq 2, \Omega$ *un domaine borné de classe* C^1 *et* $f \in C^1(\Omega)$. *Alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \int_{\partial\Omega} f(x')\nu_j(x')d\sigma(x'), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Remarque. *D'habitude le résultat précédent est formulé pour des domaines plus généraux, appelés domaines normaux ou domaines standard. Pour une plus de détails, veuillez consultez le livre de H. Triebel [8].*

Comme conséquence directe du théorème précédent nous avons le résultat suivant :

Définition 2.7.3 (Formule de Green). *Soient* $N \geq 2, \Omega$ *un domaine borné de classe* C^1 *dans* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in C^2(\Omega)$.

(i) *Soit* $g \in C^1(\Omega)$. *Alors*

$$\int_\Omega g(x)\Delta f(x)dx = -\int_\Omega \nabla g(x) \cdot \nabla g(x) + \int \partial\Omega g(x')\frac{\partial f}{\partial \eta}(x')d\sigma(x') \tag{2.7.2}$$

(ii) *Soit* $g \in C^2(\Omega)$. *Alors*

$$\int_\Omega g(x)\Delta f(x)dx - \int_\Omega \Delta g(x)f(x)dx = \int_{\partial\Omega} \left(g(x')\frac{\partial f}{\partial \eta}(x') - \frac{\partial g}{\partial \eta}(x')f(x')\right)d\sigma(x'). \tag{2.7.3}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin : *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

[2] I. Eklend and R. Temam : *Convex analysis and variational problems.* North-Holland 1978.

[3] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle théorie et applications.* Masson 1987.

[4] Lawrence F. Evans : *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics. Volume 19. American Mathematical Society 1997.

[5] J. David Logan : *An Introduction to Partial Differential Equations.* A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts 2007.

[6] J. Jost : *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag New York, Inc. 2002.

[7] Y. Penchover and J. Rubinstein : : *An Introduction to Partial Differential Equations.* Cambridge University Press 2005.

[8] H. Triebel : *Higher analysis.* Hochschulbücher für Math., J. A. Barth, Leipzig, 1992.

[9] W. P. Ziemer : *Weakly differentiable functions : Sobolev spaces and functions of bounded variation.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg 1989.