Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2021-2022

SÉRIE I OPTION : EDPA

EXERCICE 1.– [**La mesure de la sphère unité**]

(1) Prouver que $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2}dx = 1$.

(2) Définissons la fonction Gamma par $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$. Montrer que la mesure surfacique de la sphère unité est donnée par $w_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ et déduire que la mesure de la boule unité est $\frac{w_N}{N}$.

EXERCICE 2.– [**Stabilité de $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour la multiplication**] Nous allons montrer que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ est stable par la multiplication des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, l'application $\Lambda_\varphi : H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$ est linéaire continue. Pour ce faire,

(1) En utilisant l'inégalité triangulaire, prouver l'inégalité suivante :

$$\forall s \in \mathbb{R} : \quad (1+|\xi|^2)^s \le 2^s\big(1+|\eta|^2\big)^{|s|}\big(1+|\xi-\eta|^2\big)^s.$$

(2) Prouver que pour tout $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\widehat{uv}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi-\eta)\widehat{v}(\eta)d\eta.$$

(3) En appuyant sur **(1)** et **(2)**, prouver qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$\|\Lambda_\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \le C_s\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

EXERCICE 3.– [**Caractérisation des espaces de Sobolev fractionnaires**] Soient $s \in]0,1[$ et $u \in \dot{H}(\mathbb{R}^N)$.

(1) Montrer que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

(2) Montrer que la norme de $\dot{H}(\mathbb{R}^N)$ est équivalente à

$$\widehat{\|u\|}^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}dxdy.$$

EXERCICE 4.– [**Résolution de l'équation de la chaleur avec un terme d'amortissement**] Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec un terme d'amortissement est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta u + u = 0 & \text{si } t \ge 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P-C}$$

où $\kappa > 0$ représente le paramètre de conductivité de la chaleur.

(1) Supposons que $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. En appliquant la transformation de Fourier partielle au problème de Cauchy (P-C), prouver que

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)e^{-t}e^{-\kappa t|\xi|^2}.$$

(2) Montrer que si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \le \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

(3) En appliquant l'inégalité de Young,

(3.1) Prouver que $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le e^{-t}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ pour $t \ge 0$.

(3.2) En déduire que $\lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$.

(4) Supposons maintenant que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(4.1) Montrer que l'énergie associe au système (P-C) est donnée par

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^2dx + 2\kappa\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x,\tau)|^2dxd\tau + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^2dxd\tau.$$

(4.2) Déduire que $E(t) = E(0)$. Que peut-on dire ?

EXERCICE 2.– Nous allons montrer que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ est stable par la multiplication des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, l'application $\Lambda_\varphi : H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$ est linéaire continue. Pour ce faire, [1]

(I.1) En utilisant l'inégalité triangulaire, prouver l'inégalité suivante :

$$\forall s \in \mathbb{R} : \quad (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s\big(1+|\eta|^2\big)^{|s|}\big(1+|\xi-\eta|^2\big)^s.$$

Soit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^s = (1+|\xi-\eta+\eta|^2)^s &\leq \big(1+(|\xi-\eta|+|\eta|)^2\big)^s \\
&\leq 2^{|s|}\big(1+|\xi-\eta|^2\big)^s|\eta|^{2s} \\
&\leq 2^{|s|}\big(1+(|\xi-\eta|^2)\big)^s(1+|\eta|^2)^s.
\end{aligned}$$

(I.2) Prouver que pour tout $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\widehat{uv}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi-\eta)\widehat{v}(\eta)d\eta.$$

Soit $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ et ensuite on procède par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Vu que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^{-1}$ sont des isomorphismes de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même, on écrit

$$uv(x) = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{u}\star\widehat{v})(x),$$

il s'ensuit directement que

$$\widehat{uv}(\xi) = \widehat{u}\star\widehat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi-\eta)\widehat{v}(\eta)d\eta.$$

(I.3) En appuyant sur **(1)** et **(2)**, prouver qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$\|\Lambda_\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq C_s\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{\Lambda_\varphi u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Donc **(1)** *et* **(2)** *nous permet d'écrire*

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{\Lambda_\varphi u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2^{|s|}\int_{\mathbb{R}^N}\big(1+(|\xi-\eta|^2)\big)^s(1+|\eta|^2)^s\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(\eta)\widehat{u}(\xi-\eta)d\eta\Big|^2 d\xi \\
&\leq 2^{|s|}\int_{\mathbb{R}^N}\big(1+(|\xi-\eta|^2)\big)^s(1+|\eta|^2)^s\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{\varphi}(\eta)||\widehat{u}(\xi-\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Or, le théorème de Fubini implique

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &\leq 2^{|s|}\int_{\mathbb{R}^N}\big(1+(|\xi-\eta|^2)\big)^s(1+|\eta|^2)^s\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{\varphi}(\eta)||\widehat{u}(\xi-\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi. \\
&= 2^{|s|}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{\varphi}(\eta)||\big(1+(|\xi-\eta|^2)\big)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi-\eta)|d\eta\Big)^2 d\xi.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young pour le produit de convolution, on obtient

$$\|\Lambda_\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \quad \leq 2^{|s|}\|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

---

1. L'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ est défini comme étant l'ensemble $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} < +\infty.$$

EXERCICE 5.– [**Caractérisation des espaces de Sobolev fractionnaires**] Soient $s \in]0,1[$ et $u \in \dot{H}(\mathbb{R}^N)$.

(1) Montrer que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Pour montrer que* $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *on procède par décomposition en fréquence c'est-à-dire*

$$u \equiv \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,1)}\widehat{u}) + \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B^c(0,1)}\widehat{u}).$$

(2) Montrer que la norme de $\dot{H}(\mathbb{R}^N)$ est équivalente à

$$\widehat{\|u\|}^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}} dxdy.$$

D'après la question **(1)**, on peut appliquer le théorème de Fubini pour écrire

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}} dxdy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N+2s}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)-u(x)|^2 dx \Big) dy.$$

Par l'identité de Plancherel-Parseval, on écrit

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)-u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\mathscr{F}u(\xi+y) - \mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Or, le fait que $\mathscr{F}u(\xi+y) = e^{iy\xi}\widehat{u}(\xi)$ nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)-u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{iy\xi}-1|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

D'autre part, en utilisant la formule d'Euler pour les nombres complexes pour obtenir

$$\begin{aligned} |e^{iy\xi}-1|^2 &= (\cos(x\xi)-1)^2 + \sin(x\xi) \\ &= 2 - 2\cos(x\xi) = 4\sin^2\big(\frac{x\xi}{2}\big). \end{aligned}$$

On combine les deux estimations précédantes, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}} dxdy &= 4\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sin^2\big(\frac{1}{2}x\xi\big)}{|y|^{N+2s}} dy \Big) d\xi \\ &= 4\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sin^2\big(\frac{1}{2}|y||\xi|\cos\alpha\big)}{|y|^{N+2s}} dy \Big) d\xi, \end{aligned}$$

où, α est l'angle entre y et ξ. Par passage au coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$, en posant $z = rw$, avec $w \in \mathbb{S}_{N-1}$ $(|w| = 1)$ et $dy = r^{N-1}d\sigma(\alpha)$, on arrive à

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}} dxdy = 4\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{S}_{N-1}} \int_0^\infty \Big(\frac{\sin^2\big(\frac{1}{2}|y||\xi|\cos\alpha\big)}{|r|^{1+2s}} drd\sigma(\alpha) \Big) d\xi.$$

En effectuant le changement de variable $\frac{1}{2}r|\xi|\cos\alpha = \eta$, alors $r = 2\frac{\eta}{|\xi|\cos\alpha}$ et $dr = \frac{2}{|\xi|\cos\alpha}d\eta$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}} dxdy &= 4\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 2^{-2s}|\xi|^{2s} \int_{\mathbb{S}_{N-1}} \cos^{2s}\alpha d\sigma(\alpha) \int_0^\infty \frac{\sin^2\big(\frac{1}{2}|y||\xi|\cos\alpha\big)}{|\eta|^{1+2s}} d\eta d\xi \\ &= 4C_s \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

où C_s est une constante finie dépend seulement de s et donnée par $C_s = 2^{-2s}\int_{\mathbb{S}_{N-1}} \cos^{2s}\alpha d\sigma(\alpha) \int_0^\infty \frac{\sin^2\eta}{\eta^{1+2s}} d\eta$. Finalement, on déduit que

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2} + C_s \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}} dxdy.$$

Exercice 3. Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec un terme d'amortissement est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta u + u = 0 & \text{si } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P-C}$$

où $\kappa > 0$ représente le paramètre de conductivité de la chaleur.

(1) Supposons que $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. En appliquant la transformation de Fourier partielle au problème de Cauchy (P-C), prouver que

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)e^{-t}e^{-\kappa t|\xi|^2}.$$

En appliquant la transformation de Fourier aux deux équations du problème de Cauchy (P-C), on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathscr{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta u + u\right) = 0 & si\ t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \mathscr{F}(u(\xi,0)) = \mathscr{F}(u_0(\xi)) & si\ \xi \in \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{P-C}$$

Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)(\xi,t) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-ix\xi}u(x,t)\Big)dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi}u(x,t)dx = \frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi,t), \end{aligned}$$

où, on a utilisé le théorème de différentiation sous-signe intégrale de Lebesgue.

Pour le deuxième terme, en utilisant les propriétés élementaires de la transformation de Fourier, il vient que

$$\mathscr{F}(\kappa\Delta u(\xi,t)) = -\kappa|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t)$$

Mettre ensemble les deux estimations précédantes, donc le problème de Cauchy (P-C) en Fourier devient une équation différentielle ordinaire

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \kappa|\xi|^2\widehat{u} + \widehat{u} = 0 & si\ t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi) & si\ \xi \in \mathbb{R}^N, \text{(P-C-F)} \end{array}\right. \quad Ceciquivalent \left\{\begin{array}{ll} \frac{\widehat{u}}{\partial t} + (1+\kappa|\xi|^2)\widehat{u} = 0 & si\ t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi) & si\ \xi \in \mathbb{R}^N, \text{(P-C-F)} \end{array}\right.$$

On commence à résoudre l'EDO $\frac{\widehat{u}}{dt} + (1+\kappa|\xi|^2)\widehat{u} = 0$, *en multipliant les deux côtés par* $e^{(1+\kappa t|\xi|^2)}$, *après un calcul élémentaire, on obtient* $\frac{d}{dt}\big(e^{(1+\kappa t|\xi|^2)}\widehat{u}(\xi,t)\big) = 0$. *Un simple intégrale en temps sur* $[0,t]$ *nous fournit la solution* $\widehat{u}(\xi,t) = e^{-(1+\kappa t|\xi|^2)}u_0(\xi)$.

(2) *Montrer que si* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *alors*

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Soit $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$, *alors d'après* **(1)** *on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(1+\kappa t|\xi|^2)}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}_0(\xi)|^2d\xi, \quad e^{-(1+\kappa t|\xi|^2)} \leq 1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}_0(\xi)|^2d\xi < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité souhaitée.

(3) *En appliquant l'inégalité de Young,*

(3.1) *Prouver que* $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{-t}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ *pour* $t \geq 0$. *D'après* **(1)**, *on a* $\widehat{u}(\xi,t) = e^{-(1+\kappa t|\xi|^2)}u_0(\xi)$, *donc*

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi,t) &= \mathscr{F}\big(\mathscr{F}^{-1}(e^{-(1+\kappa t|\xi|^2)}) \star u_0(\xi)\big) \\ &= e^{-t}\mathscr{F}\big(\mathscr{F}^{-1}(e^{-\kappa t|\xi|^2} \star u_0(\xi)\big) \\ &= e^{-t}\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}e^{-\kappa t|\xi|^2}) \star u_0(\xi)\Big) \end{aligned}$$

Le fait que $\mathscr{F}^{-1}(e^{-\kappa t|\xi|^2}) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}}e^{-|x|^2/4\kappa t}$ *et* $\mathscr{F}$ *est un isomorphisme nous donne*

$$u(x,t) = e^{-t}\frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x-y|^2/4\kappa t}u_0(x)dx$$

(3.2) *En déduire que* $\lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$.

En appliquant l'inégalité de Young $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=1$ *pour* $q=r=\infty$, *il vient que pour* $t\geq 0\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq e^{-t}\frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}}e^{-|x|^2/4\kappa t}dx\|u_0\|_{L^\infty}$*Sachant que* $\frac{1}{(4\pi\kappa t)^{N/2}}e^{-|x|^2/4\kappa t}dx=1$, *il en résulte que pour* $t\geq 0$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq e^{-t}\|u_0\|_{L^\infty}.$$

Par passage à la limite, on trouve

$$0\leq \lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq \lim_{t\to+\infty}e^{-t}\|u_0\|_{L^\infty}=0$$

D'où l'inégalité désirée.

(4) Supposons maintenant que $u_0\in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(4.1) Montrer que l'énergie associe au système (P-C) est donnée par

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}^N}|u(x,t)|^2dx+2\kappa\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x,\tau)|^2dxd\tau+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|u(x,t)|^2dxd\tau.$$

Pour ce faire, en mulptipliant la première équation de (P-C) par u et on intègre sur $\mathbb{R}^N$, *on trouve*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\big)u(x,t)dx-\kappa\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u(x,t))u(x,t)dx+\int_{\mathbb{R}^N}u^2(x,t)dx=0$$

On traite chaque terme séparément. Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\big)u(x,t)dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t)dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}u^2(x,t)dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Concernant le deuxième terme, en utilisant la formuke de Green (Intégration par parties dans $\mathbb{R}^N$*), il s'ensuit que*

$$-\kappa\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u(x,t))u(x,t)dx=\kappa\int_{\mathbb{R}^N}\|\nabla u(x,t)\|^2dx=\kappa\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

En combinant les estimations précédentes pour avoir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\kappa\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}{}^2=0$$

Posons $\mathscr{E}(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\kappa\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}{}^2$ *Pour déduire l'énergie, on intègre sur l'intervalle* $[0,t]$ *pour obtenir*

$$E(t)=\|u(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+2\kappa\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\tau+\int_0^t\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}{}^2=\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

(4.2) Déduire que $E(t)=E(0)$. Que peut-on dire ? *Pour déduire voir la dernière identité. Dans ce cas, on dit que l'énergie est conservée.*