Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2021-2022

SÉRIE II OPTION : EDPA

Exercice 1. L'exercice est composé de deux parties.
(I) L'objectif de cette partie est de calculer la transformation de Fourier de la fonction $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto e^{-t\|x\|}$, avec $t > 0$.

(I.1) Calculer $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathscr{F}\left(e^{-t|\cdot|}\right)(\xi)$ et déduire par Fourier inverse la valeur de $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-t|x|}$.

(I.2) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-s(t^2+\xi^2)}ds = \frac{1}{t^2+\xi^2}$, en déduire par le lemme de Fubini qu'on a :

$$e^{-t|x|} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-st^2}e^{-s\xi^2}e^{-ix\xi}d\xi ds.$$

(I.3) Utilisez le fait $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\xi^2}e^{-ix\xi}d\xi = (\pi/s)^{1/2}e^{-x^2/4s}$, vérifier que

$$e^{-t|x|} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(\pi s)^{1/2}}e^{-st^2}e^{-x^2/4s}ds$$

(I.4) Maintenant, soit $x \in \mathbb{R}^N$.

(I.4.1) En s'appuyant sur **(I.3)**, donner l'expression de $e^{-t\|x\|}$.

(I.4.2) En déduire (en justifiant) que

$$\mathscr{F}\left(e^{-t\|\cdot\|}\right)(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(\pi s)^{1/2}}(4\pi s)^{N/2}e^{-st^2}e^{-s\|\xi\|^2}ds.$$

(I.5) En effectuant le changement de variable $s \mapsto \frac{s}{(t^2+\|\xi\|^2)}$, prouver que

$$\mathscr{F}\left(e^{-t\|\cdot\|}\right)(\xi) = \frac{t}{(t^2+\|\xi\|^2)^{\frac{N+1}{2}}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\pi s)^{1/2}}(4\pi s)^{N/2}e^{-s}ds.$$

(I.6) En introduisant la fonction Gamma $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1}e^{-s}ds$, prouver que

$$\mathscr{F}\left(e^{-t\|\cdot\|}\right)(\xi) = 2^N\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)\frac{t}{(t^2+\|\xi\|^2)^{\frac{N+1}{2}}}.$$

(II) La deuxième partie est dédiée à l'étude d'une équation d'évolution à la lumière de la première partie. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta + \Delta^2\right)u(x,t) = 0 & \text{si } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^N \\ u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P-C}$$

où $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ et u vérifie $|u(x,t)| \leq c(1+|t|)$ pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

(II.1) En appliquant la transformation de Fourier partielle au problème de Cauchy (P-C). Prouver que

$$\hat{u}(\xi,t) = \left(e^{-t\|\xi\|} + t|\xi|e^{-t\|\xi\|}\right)\hat{f}(\xi) + te^{-t\|\xi\|}\hat{g}(\xi).$$

(II.2) Prouver que $\mathscr{F}^{-1}\left(\|\xi\|e^{-t\|\xi\|}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}^{-1}\left(e^{-t\|\xi\|}\right)$.

(II.3) Déduire l'expression de u.

(II.4) En appuyant sur **(II.1)**, montrer que $u \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+; \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)\right)$.