Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Equations aux dérivées partielles
Mr. Zerguine Mohamed
2023-2024

TRAVAUX DIRIGÉS I : 3ème année LMD

EXERCICE 1.–

(1) Calculer le gradient des fonctions suivantes :

$$u(x,y,z) = 2x^2(y-z^3), \quad u(x,y) = \sin(x^2+y^2)+xy, \quad u(x,y,z) = xyz\sin(xy).$$

$$u(x,y) = (x^2+y^2, 2xy, x^2-y^2), \quad u(x,y) = (\sin xyz, xe^{x^2+y^2+z^2}, \ln z).$$

(2) Calculer la matrice hessienne $\nabla^2 u$ où $u(x,y) = 2x^2(y-z^3)$.

(3) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Exprimer le gradient ∇ en coordonnées cylindriques et calculer le gradient de la fonction $u(r,\theta,z) = (r(2+\sin^2\theta), r\sin\theta\cos\theta, 3z)$.

EXERCICE 2.– Montrer les relations suivantes :

(1) rot $\nabla u = 0$, où $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire deux fois différentiable.

(3) div rot $u = 0$, où $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs deux fois différentiable.

(3) $\Delta u = \nabla$div $u -$ rot rot u où $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs deux fois différentiable.

EXERCICE 3.– On considère la fonction (champ de vecteurs) $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x,y,z) = (y, x+z, y+2z)$.

(1) Montrer rot $u = 0$.

(2) Montrer que la fonction u dérive d'un potentiel scalaire et calculer ce potentiel, c'est-à-dire il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $u = \nabla f$.

Soit $u : B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction défine par $u(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

(1) Quelles sont les courbes de niveaux $\mathscr{C}_u$ de u, c'est-à-dires les courbes qui vérifient $u(x,y) = a$ avec $a \in]0,1]$.

(2) Calculer le gradient de u.

(3) Représenter formellement le graphe de u ainsi que les courbes de niveau $\mathscr{C}_u$.

EXERCICE 4.–

(1) Calculer la divergence des fonctions suivantes :

$$u(x,y,z) = (3x-2z, 8x^2-9\sqrt{y}+3yz, 7x-2y^3), \quad u(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2}\right) \text{ au point } (1,-1,2).$$

(2) Exprimer l'opérateur divergence "div " en coordonnées cylindriques et calculer la divegence de $u(r,\theta,z) = (3r^5+2\theta, 7r-2\sin\theta+3z, 8r^2+7z)$

(3) Déduire aussi le laplacien en coordonneés cylindriques et caluler le laplacien de $u(r,\theta,z) = (r^2, \sin\theta, z^2)$.

EXERCICE 5.– On considère le champ de vecteurs $u(x,y,z) = (xy, -y^2, z^2)$.

(1) Calculer la divergence et le rotationnel de u.

(2) Le champ u est-il un champ de gradient.

(3) Calculer sa circulation le long du cercle horizontal, de centre $C(0,0,b)$ et de rayon r.

(4) Mêmes questions pour le champ $u(x,y,z) = (yz, xz, xy)$