Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2019-2020

TRAVAUX DIRIGÉS I
2ème année Master. Option : EDPA

EXERCICE 1.– [**La mesure de la sphère unité**]

(1) Prouver que $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2}dx = 1$.

(2) Définissons la fonction Gamma par $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$. Montrer que la mesure surfacique de la sphère unité est $w_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ et déduire que la mesure de la boule unité est $\frac{w_N}{N}$.

EXERCICE 2.– [**Principe d'incertitude de Heisenberg**] Soit $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2dx = 1$.

(1) Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|\Psi(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\Psi}(\xi)|^2d\xi\right) \geq \frac{1}{4}$.

(2) Etablir ce principe dans $\mathbb{R}^N$.

EXERCICE 3.– [**Inégalité de Hardy**] Soit $N \geq 3$, montrer que pour tout $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx\right)^{1/2} \leq \frac{2}{N-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{H}$$

Pour ce faire, on procède par étapes :

(1) Vérifier que $\mathscr{R}(|\cdot|^{-2})(x) = -2|x|^{-2}$, où $\mathscr{R} = \sum_{i=1}^N x_i\partial_{x_i}$

(2) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2u(x)(\mathscr{R}u)|x|}{|x|^2}dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx,$$

en déduire (H).

EXERCICE 4.– [**Fourier de la fonction de Gauss**]

(1) Soit $\lambda > 0$, montrer que $\mathscr{F}\left(e^{-\lambda|\cdot|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{N/2}e^{-|\xi|^2/4\lambda}$.

(1) Soit $\lambda = -is$, $s \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathscr{F}\left(e^{is|\cdot|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{-is}\right)^{N/2}e^{-i|\xi|^2/4s},$$

avec $\left(\frac{\pi}{-is}\right)^{N/2} = \left(\frac{\pi}{|s|}\right)^{N/2}e^{iN\pi/4}$ si $s > 0$, ou $\left(\frac{\pi}{|s|}\right)^{N/2}e^{-iN\pi/4}$ si $s < 0$.

EXERCICE 5.– [**Caractérisation des espaces de Sobolev fractionnaires**] Soient $s \in]0,1[$ et $u \in \dot{H}(\mathbb{R}^N)$.

(1) Montrer que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}dxdy < \infty.$$

(2) Prouver qu'il existe une constante C_s telle que pour tout $u \in \dot{H}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\|u\|^2 = C_s\int_{\mathbb{R}^N\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{N+2s}}dxdy.$$