Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2019-2020

TRAVAUX DIRIGÉS II

2ème année Master. Option : EDP

Exercice 1.– Considérons les fonctions suivantes :

$$E_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x| & \text{si } N = 1, \\ \frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si } N = 2, \\ \frac{1}{w_N(2-N)}|x|^{2-N} & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

où w_N représente la mesure surfacique de la sphère unité.

(1) Monter que $E_N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et que E_N sont des solutions élémentaires du laplacien Δ, c'est-à-dire $\Delta E_N = \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, avec δ_0 est la masse de Dirac centrée en 0.

(2) Montrer que l'équation $\Delta u = f$ admet une solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ de type $u \equiv E_N \star f$.

(3) Montrer que le laplacien Δ est invariant par les matrices orthogonales $R \in O_N(\mathbb{R})$, c-a-d

$$\Delta(f \circ R) = (\Delta f) \circ R, \quad \forall f \in C^2(\mathbb{R}^N).$$

(3) Action du laplacien sur les fonctions radiales : montrer que pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^\star_+)$ on a

$$\Delta\big(f(|x|)\big) = f''(|x|) + \frac{(N-1)}{|x|} f'(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N\{0\}$$

Exercice 2.– On considère dans $S'(\mathbb{R}^N)$ l'équation elliptique $\Delta u - u = f$.

(1) Montrer que $-(|\xi|^2+1)\widehat{u} = \widehat{f}$ and

$$u \equiv \frac{1}{(2\pi)^N}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{|\xi|^2+1}\mathscr{F} f\right\}.$$

(3) Déduire que si $f \in S(\mathbb{R}^N)$, alors u l'est aussi.

(4) Supposons que $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 3. Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec un terme d'amortissement est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta u + u = 0 & \text{si } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{P-C}$$

où $\kappa > 0$ représente le paramètre de conductivité de la chaleur.

(1) Supposons que $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. En appliquant la transformation de Fourier partielle au problème de Cauchy (P-C), prouver que

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-t}e^{-\kappa t|\xi|^2}.$$

(2) Montrer que si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N), s \in \mathbb{R}$ alors

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

(3) En appliquant l'inégalité de Young,

(3.1) Prouver que $\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{-t}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ pour $t \geq 0$.

(3.2) En déduire que $\lim_{t\to+\infty}\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$.

(4) Supposons maintenant que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(4.1) Montrer que l'énergie associe au système (P-C) est donnée par

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^N}|u(x,t)|^2dx + 2\kappa\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x,\tau)|^2dxd\tau + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|u(x,t)|^2dxd\tau.$$

(4.2) Déduire que $E(t) = E(0)$. Que peut-on dire ?