جامعة باتنة ٢ — كلية الرياضيات و الاعلام الالي — قسم الرياضيات

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2021-2022

SERIE III

2ÈME ANNÉE MASTER. OPTION : EDP

EXERCICE 1.– On considère dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'équation elliptique $\Delta u - u = f$.

(1) Montrer que $-(|\xi|^2+1)\widehat{u} = \widehat{f}$ and

$$u \equiv \frac{1}{(2\pi)^N}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{|\xi|^2+1}\mathscr{F}f\right\}.$$

(3) Déduire que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, alors u l'est aussi.

(4) Supposons que $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$.

EXERCICE 2.– Considérons les fonctions suivantes :

$$E_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x| & \text{si } N=1, \\ \frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si } N=2, \\ \frac{1}{w_N(2-N)}|x|^{2-N} & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

où w_N représente la mesure surfacique de la sphère unité.

(1) Monter que $E_N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et que E_N sont des solutions élémentaires du laplacien Δ, c'est-à-dire $\Delta E_N = \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, avec δ_0 est la masse de Dirac centrée en 0.

(2) Montrer que l'équation $\Delta u = f$ admet une solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ de type $u \equiv E_N \star f$.

(3) Action du laplacien sur les fonctions radiales : montrer que pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^\star_+)$ on a

$$\Delta\big(f(|x|)\big) = f''(|x|) + \frac{(N-1)}{|x|}f'(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N\{0\}$$

EXERCICE 3.– Soit A l'opérateur $(1-\Delta)^2$ défini dans $\mathbb{R}^N_+ := \{x = (x', x_N) \in \mathbb{N}^{n-1} \ltimes \mathbb{R} \colon x_N > 0\}$. Le bord de l'ouvert $\mathbb{R}^N_+$ est identifié à $\mathbb{R}^{N-1}$ et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \mathbb{R}^N_+, \\ \gamma_0 u = \varphi_0 & \text{sur } \mathbb{R}^{N-1}, \\ \gamma_1 u = \varphi_1 & \text{sur } \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \tag{1}$$

où γ_0 désigne l'opérateur de trace

$$\gamma_0 \colon u \mapsto \gamma_0 u,$$

où pour $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \ltimes \mathbb{R}$, $\quad \gamma_0 u(x') = u(x', 0)$.
De même γ_1 désigne l'opérateur de trace

$$\gamma_1 : u \mapsto \gamma_1 u = \gamma_0 \circ \partial_{x_N},$$

où pour $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \ltimes \mathbb{R}$, $\quad \gamma_1 u(x') = (\partial_{x_N} u)(x', 0)$.

(1) Soit $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$. On définit $\xi' > := (1+\xi'^2)^{\frac{1}{2}}$. Démontrer que l'équation différentielle ordinaire

$$\left(\xi' >^2 - \partial^2_{x_N}\right)^2 u(x_N) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+$$

admet sur $\mathbb{R}_+$ la solution bornée suivante

$$c_0 e^{-\xi' > x_N} + c_1 x_n e^{-\xi' > x_N}, \qquad c_0, c_1 \in \mathbb{C}.$$

(2) Prouver qu'on peut trouver pour chaque $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$ une transformation linéaire

$$C(\xi') : \big(\widehat{\varphi}_0(\xi'), \widehat{\varphi}_1(\xi')\big) \mapsto \big(c_0(\xi'), c_1(\xi')\big)$$

telle que l'opérateur

$$K : \big(\varphi_0(x'), \varphi_1(x')\big) \mapsto \mathscr{F}^{-1}_{N-1}\big(c_0(\xi')e^{-\xi' > x_N} + c_1(\xi')x_n e^{-\xi' > x_N}\big),$$

[1] opère de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{N-1}) \ltimes \mathscr{S}(\mathbb{R}^{N-1})$ dans $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ et résout le problème (1) avec $f = 0$ et φ_0, φ_1 donnés dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{N-1})$. Déterminer $C(\xi')$.

(3) Prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$ l'opérateur K est continu de $H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1}) \ltimes H^{m-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ dans $H^m(\mathbb{R}^N_+)$.

1. $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}^N_+)$ désigne l'espace des fonctions restriction à $\mathbb{R}^N_+$ de fonctions appartenant à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$