Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Ana. Math. Eqs. Navier-Stokes
Mr. Zerguine Mohamed
2019-2020

TRAVAUX DIRIGÉS IV

2ème année Master. Option : EDP

Nous allons étudier l'évolution d'une fonction scalaire $\theta : \mathbb{R}_+\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(t,x) \mapsto \theta(t,x)$ régissant ce qu'on appelle l'équation quasi-géostrophique

$$\begin{cases} \partial\theta + v\cdot\nabla\theta - \Delta\theta = 0 & (t,x)\in\mathbb{R}_+\mathbb{R}^2 \\ v = (v^1,v^2) = \nabla^{\perp}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta = (-\partial_2(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta, \partial_1(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta) & \\ \theta(0,x) = \theta_0(x). & \end{cases} \tag{QG}$$

On vous rappelle les notations suivantes :

$$v\cdot\nabla\theta = v^1\partial_1\theta + v^2\partial_2\theta, \quad \Delta\theta = \partial_1^2\theta + \partial_2^2\theta.$$

L'opérateur $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, $j\in\{1,2\}$ est définie formellement par la transformée de Fourier comme suit

$$\mathscr{F}\left(\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta\right)(\xi) = i\frac{\xi}{|\xi|}\widehat{\theta}(\xi).$$

Résultat admis : l'opérateur $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ est continu sur L^p pour tout $p\in]1,\infty[$.
Remarque. On ne justifiera pas les calculs formels, par exemple les intégrations par parties.

Partie I.

(I.1) Vérifier que div $v=0$ et que $v\cdot\nabla\theta = \text{div}\,(v\theta)$.

(I.2) Montrer que les opérateurs $\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ sont continus sur les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s$ pour tout $s\in\mathbb{R}$.

(I.3) Montrer l'égalité d'énergie suivante

$$\forall t\geq 0, \quad \|\theta(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla\theta(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = \|\theta_0\|_{L^2}^2.$$

(I.4) Vérifier que

$$-\int_{\mathbb{R}^2}\theta^3(x)\Delta\theta(x)dx = 3\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\theta(x)|^2\theta^2(x)dx.$$

(I.5) En multipliant l'équation de θ par θ^3 et intégrant par parties, montrer que

$$\forall t\geq 0, \quad \|\theta(t)\|_{L^4}^4 + 3\int_0^t \|\nabla(\theta^2)(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = \|\theta_0\|_{L^4}^4.$$

On note par $\mathbb{S}(t) = e^{t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur et la formule de Duhamel associe à l'équation (QG) est donnée par

$$\theta(t,x) = \mathbb{S}(t)\theta_0(x) + \mathbf{B}(\theta,\theta)(t,x), \tag{Int}$$

avec $\mathbf{B}$ est une forme bilinéaire définie par

$$\mathbf{B}(\varphi,\rho)(t,x) = -\int_0^t \mathbb{S}(t-\tau)\text{div}\,\Big(\big(\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\varphi\big)\rho\Big)(\tau,x)d\tau.$$

Partie II. Supposons que $\theta_0\in\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$.

(II.1) Rappeler pourquoi $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Banach et donner l'exposant p pour lequel l'injection $\dot{H}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^p$ soit continue.

(II.2) Montrer que pour tout $t \geq 0$
$$\|\mathbb{S}(t)\theta_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\theta_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}.$$

(II.3) En utilisant l'identité de Plancheral-Parseval, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\left\|\left(\nabla^{\perp}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\varphi\right)\rho\right\|_{L^2} \leq C\|\varphi\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\|\rho\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall \varphi, \rho \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$$

(II.4) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f = (f_1, f_2) \in \left(L^2(\mathbb{R}^2)\right)^2$ on a
$$\|\mathbb{S}(t)\mathrm{div}\, f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq Ct^{-\frac{3}{4}}\|f\|_{L^2}, \quad \forall t > 0.$$

(II.5) En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varphi, \rho \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$
$$\left\|\mathbf{B}(\varphi,\rho)(t)\right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq C\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}}\|\varphi(\tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\|\rho(\tau)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}d\tau, \quad \forall t > 0$$

Soit $T > 0$ et on définit l'espace $\mathscr{X}_T = L^\infty\left([0,T];\dot{H}^{\frac{1}{2}}\right)$.

(II.6) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$ on a
$$\sup_{\|\varphi\|_{\mathscr{X}_T}\leq 1 \quad \|\rho\|_{\mathscr{X}_T}\leq 1} \left\|\mathbf{B}(\varphi,\rho)\right\|_{\mathscr{X}_T} \leq CT^{\frac{1}{4}}.$$

(II.7) Sot $T > 0$ tel que $4CT^{\frac{1}{4}}\|\theta_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < 1$. Montrer que l'équation (Int) admet une unique solution dans la boule $B(0, 2\|\theta_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}})$ de l'espace $\mathscr{X}_T$.

On admet que cette solution locale est dans l'espace $C\left([0,T];\dot{H}^{\frac{1}{2}}\right)$.

Partie III. *Soit $\theta \in C\left([0,T^\star);\dot{H}^{\frac{1}{2}}\right)$ la solution maximale de (Int). On se propose de démontrer que $T^\star = +\infty$. On suppose dans la suite que $T^\star < +\infty$.*

(III.1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall t \in [0, T^\star[, \quad \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \geq C(T^\star - t)^{-\frac{1}{4}}.$$

(III.2) En utilisant la question **(I.5)** de la partie **I**, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall t \in [0, T^\star[, \quad \|\mathbf{B}(\theta,\theta)(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq Ct^{\frac{1}{4}}\|\theta_0\|_{L^4}^2.$$

(III.3) En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que
$$\forall t \in [0, T^\star[, \quad \|\theta(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\theta_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + Ct^{\frac{1}{4}}\|\theta_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{4}}}^2.$$

(III.4) Que peut-on conclure ?