بسم الله الرحمن الرحيم

In the name of Allah, the most beneficent, the most merciful

جامعة باتنة 2
الشهيد مصطفى بن بولعيد

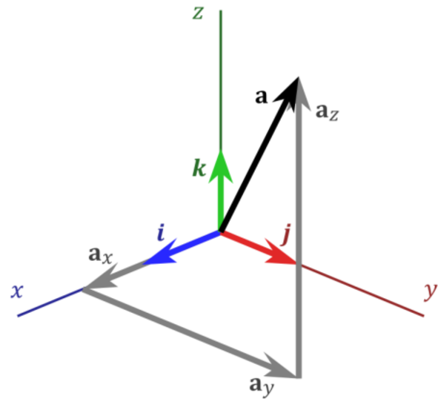
UEF 112
Cours Physique 1

Mécanique du point materiel
ميكانيك النقطة المادية

Dr L. ABDELHAMID
Dr S ZEROUALI

Chapitre I : Rappels mathématiques

مراجعة رياضية



- I-1 / Calcul vectoriel الحساب الشعاعي
- I-1- a / Notions sur les vecteurs مفاهيم حول الاشعة
- I-1- b / Opérations sur les vecteurs عمليات على الاشعة
- I-2 / Produit scalaire الجداء السلمي
- I-2–a/ Expression géométrique du Produit scalaire العبارة الهندسية للجداء السلمي
- I-2–b/ Expression analytique du Produit scalaire العبارة التحليلية للجداء السلمي
- I-3 / Produit vectoriel الجداء الشعاعي
- I-3–a/ Expression géométrique du Produit vectoriel العبارة الهندسية للجداء الشعاعي
- I-3–b/ Expression analytique du Produit vectoriel العبارة التحليلية للجداء الشعاعي

Chapitre I   Rappels mathématiques

- I-4 / Systèmes usuels de coordonnées	الأنظمة الأساسية للإحداثيات
- I-4- a / Coordonnées Cartésiennes	الاحداثيات الديكارتية
- I-4-b / Coordonnées polaires	الاحداثيات القطبية
- I-4-c / Coordonnées cylindriques	الاحداثيات الاسطوانية
- I-4-d / Coordonnées sphériques	الاحداثيات الكروية

Chapitre II Cinématique du point matériel

حركيات النقطة المادية

- II-1 / Généralités — مفاهيم عامة
- II-2 / Repérage d'un mobile
- II-2–a/ Vecteur position — شعاع الموضع
- II-2–b/ Vecteur vitesse — شعاع السرعة
- II-2–c/ Vecteur accélération — شعاع التسارع
- II-3/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes
- II-4/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées polaires
- II-5/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

  عبارة شعاع السرعة والتسارع في الاحداثيات الديكارتية,القطبية و الاسطوانية
- II-6/ Repère de Frenet — معلم Frenet

Chapitre III : Etude des mouvement

1. **Mouvement rectiligne** — **الحركة المستقيمة**

1/a. Mouvement rectiligne uniforme (MRU) — الحركة المستقيمة المنتظمة

1/b. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV) — الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

2. **Mouvement circulaire** — **الحركة الدائرية**

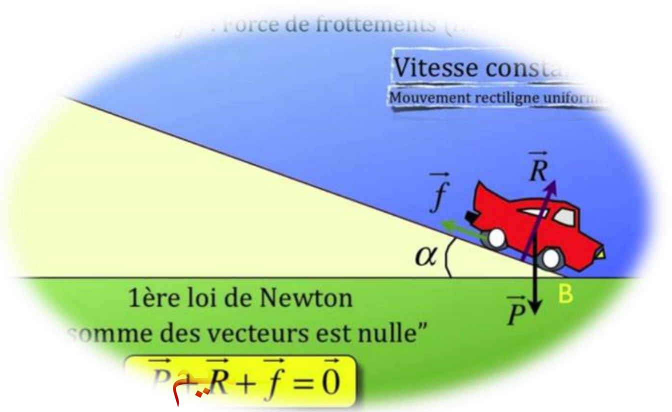
2/a. Mouvement circulaire uniforme — الحركة الدائرية المنتظمة

2/b. Mouvement circulaire uniformément varié — الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام

3. **Mouvement rectiligne sinusoïdal** — **الحركة المستقيمة الجيبية**
4. **Mouvement parabolique** — **الحركة**

Chapitre IV : Dynamique

تحريك النقطة المادية



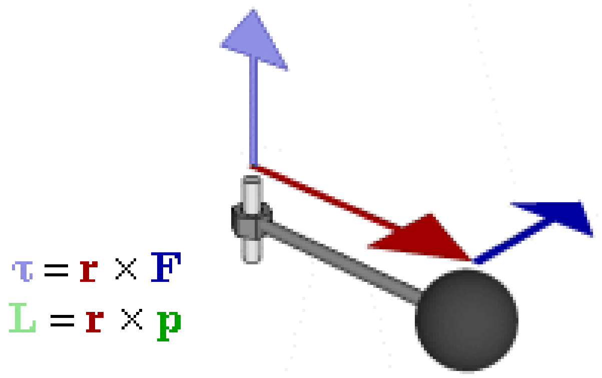
1. Introduction
2. Systèmes étudiés et actions mécaniques — الأنظمة و الافعال الميكانيكية
3. Différents types de forces — أنواع القوى
4. Lois de Newton — قوانين نيوتن

4.a. 1ère loi de Newton (Principe d'inertie) — مبدأ العطالة

4.b. 2ème loi de Newton (Principe fondamentale de la dynamique) — المبدأ الأساسي للتحريك

4.c. 3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques) — مبدأ الفعل ورد الفعل

Chapitre IV : Dynamique
تحريك النقطة المادية



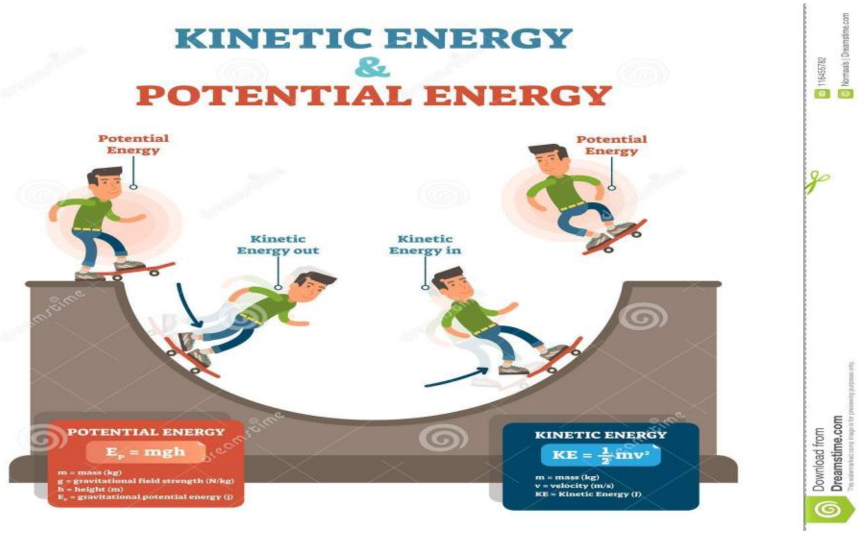
5. Application (le pendule simple)
6. Moment d’une force — عزم القوة
7. Moment cinétique — عزم العطالة
8. Théorème du moment cinétique (TMC) — نظرية العزم الحركي
9. Analogie entre grandeurs de translation et de rotation

المقارنة بين المقادير الخطية و الدائرية

Chapitre V : Travail, Puissance & énergie

العمل, الاستطاعة و الطاقة

1. Généralités — مفاهيم عامة
2. Travail d’une force — عمل القوة
3. Puissance d’une force — الاستطاعة
4. Energie — الطاقة



Chapitre I : Rappels mathématiques

1. Calcul vectoriel
2. Produit Scalaire
3. Produit vectoriel
4. Systèmes usuels de coordonnés

1. Calcul vectoriel الحساب الشعاعي

a. Notions sur les vecteurs

Les grandeurs physiques sont décomposées en deux formes : scalaire et vectorielle.

1. Grandeur scalaire : مقدار سلمي

Une grandeur scalaire est exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

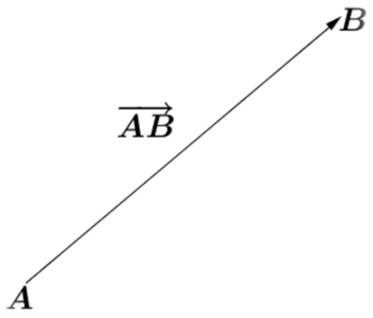
Exemple : la longueur, la masse, le volume la température ou les intervalles de temps, ….

Ces quantités sont appelées **grandeurs** scalaires.

2. Grandeur vectorielle : مقدار شعاعي

Segment de droite AB, ayant une origine A et une extrémité B, défini par :

- ✓ Son origine (ou point d'application)
- ✓ Sa direction
- ✓ Son sens
- ✓ Sa norme (ou son module)



- Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique,....

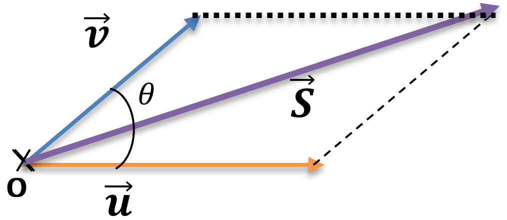
1. Calcul vectoriel

Operations sur les vecteurs : عمليات حول الاشعة

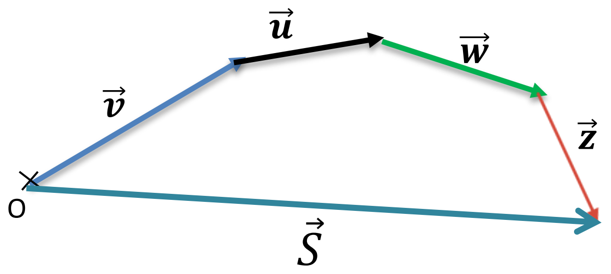
- **Somme de vecteurs**

• La somme (ou la résultante) de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un autre vecteur $\vec{S}$ défini par:

$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Donc c'est une opération **commutative**.

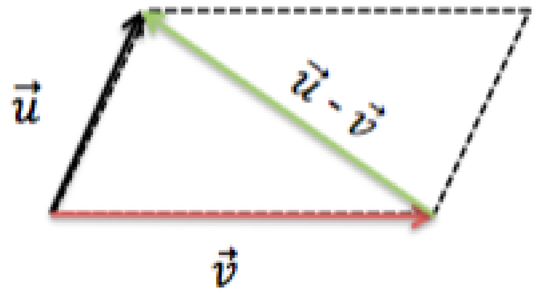


- **La somme géométrique de plusieurs vecteurs :**



$$\vec{S} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w} + \vec{z}$$

- **Différence de vecteurs**



La soustraction de vecteurs

n'est pas commutative :

$$\vec{D} = \vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}.$$

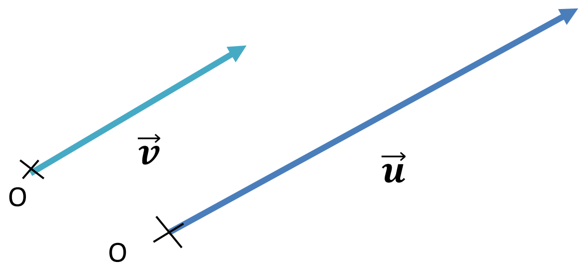
Multiplication d'un vecteur par un scalaire

- Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire α est un vecteur noté $\alpha\vec{u}$.

$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

- Notons que deux vecteurs sont colinéaires (parallèle) si et seulement s'ils sont proportionnels c'est-à-dire s'il existe un nombre α tel que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$



Composantes et norme d'un vecteur

- Soit A et B deux points dans un repère cartésien $A(x_a, y_a)$ et

$B(x_b, y_b)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour coordonnées $(x_b - x_a, y_b - y_a)$

ou bien: $\begin{pmatrix} x_b - xa \\ y_b - ya \end{pmatrix}$

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\vec{\imath} + (y_b - y_a)\vec{\jmath} = a\,\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$
- La norme ou le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dans l'espace : A(x_a , y_a , z_a) et B(x_b ,y_b , z_b) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour coordonnées :

$< x_b\text{-}x_a , y_b\text{-}y_a , z_b\text{-}z_a >$ ou bien: $\begin{pmatrix} x_b - xa \\ y_b - ya \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$

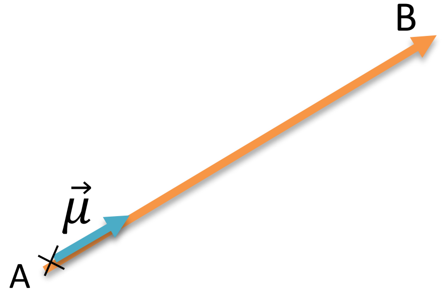
Le vecteur s'écrit

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\,\vec{i} + (y_b - y_a)\,\vec{j} + (y_b - y_a)\,\vec{k} = a\,\vec{i} + b\vec{j} + c\,\vec{k}$$

Vecteur unitaire شعاع الوحدة

- Le vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le rapport de ce vecteur sur le module de celui-ci.

$$\vec{\mu} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$



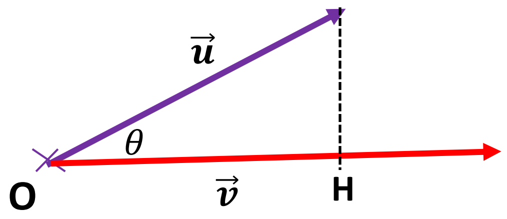
I-2 Produit scalaire الجداء السلمي

a/ Expression géométrique du Produit scalaire

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs faisant un angle géométrique θ, on appelle produit scalaire et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le nombre réel (scalaire) :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|\,.\cos\theta$$

- C'est le produit du module de $\|\vec{v}\|$ par la projection de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ $(\|\vec{u}\|\cos\theta)$.



Remarque: si l'angle θ est aigu $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est positif

si l''angle θ est obtus $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est négatif

si l''angle θ est droit $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est nul

b/ Expression analytique du Produit scalaire

العبارة التحليلية للجداء السلمي

Si $\vec{u}$ = <X, Y, Z > et $\vec{v}$ = <X', Y', Z'> alors l'expression analytique du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'$$

En effet,

$$(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}).(X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}) = XX' + YY' + ZZ'$$

Puisque :

$$\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$$

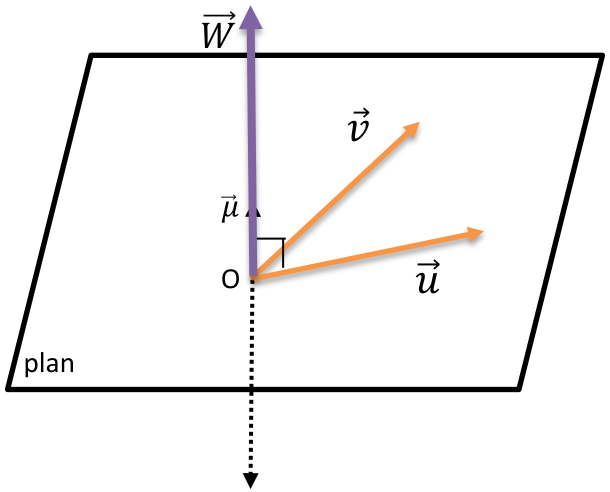
et que $\quad \vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = \vec{k}\,.\,\vec{j} = \vec{i}\,.\,\vec{k} = 0$

I-3 / Produit vectoriel الجداء الشعاعي

a- Expression géométrique du Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et defini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta.\vec{\mu}$$



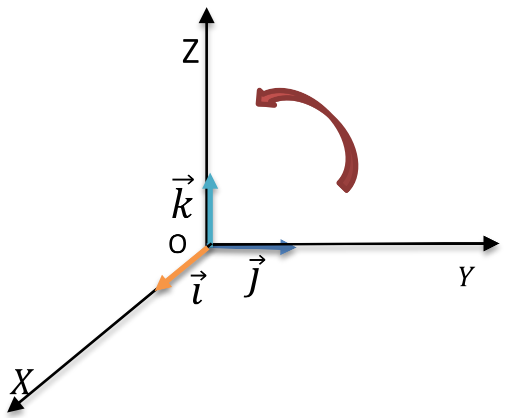
b/ Expression analytique du Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

Tels que:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;;\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



-Méthode matricielle :

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{bmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

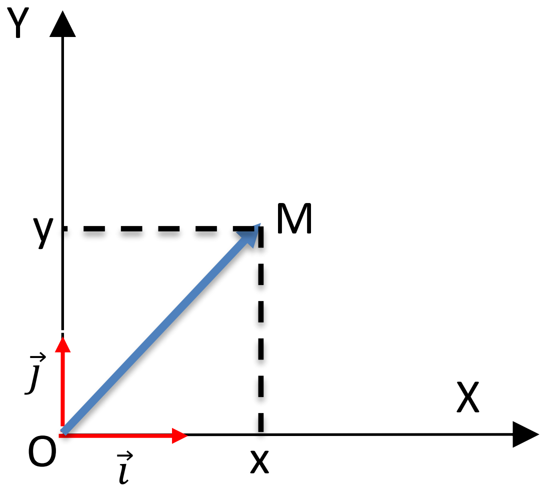
- **Exemple :**
- Calculer le vecteur $\overrightarrow{W}$ produit des deux vecteurs : $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
- en déduire l'angle θ compris entre eux.
- Solution :
- $\overrightarrow{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2+0)\vec{i} - (-4+1)\vec{j} + (0-1)\vec{k}$
- $\overrightarrow{W} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$
-
- $V_1 = \sqrt{(-2)^2 + 1 + 1} = \sqrt{6}$; $V_2 = \sqrt{1 + 0 + 2^2} = \sqrt{5}$; $W = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14}$;
- $W = V_1 . V_2 . \sin\theta = \sqrt{14} \rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}} = 0{,}683 \rightarrow \theta = 43{,}08°$

Produit mixte الجداء المختلط

- Le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}$,$\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ est la quantité scalaire définie par :
- $\overrightarrow{V_1} \,.\, (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

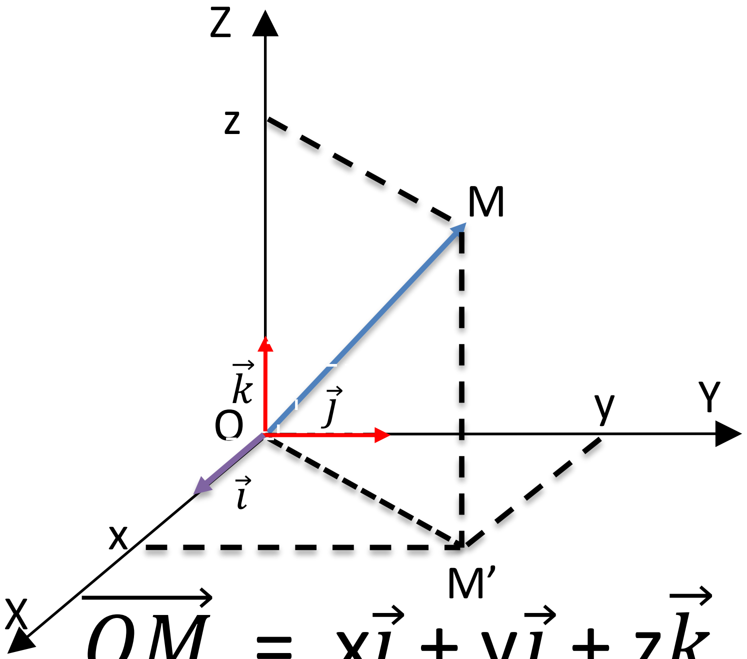
$= (y_2 z_3 - y_3 z_2) x_1 - (x_2 z_3 - x_3 z_2) y_1 +$
$(x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1$

I-4 / Systèmes usuels de coordonnées
a / Coordonnées Cartésiennes



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

dans le plan



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

dans l'espace

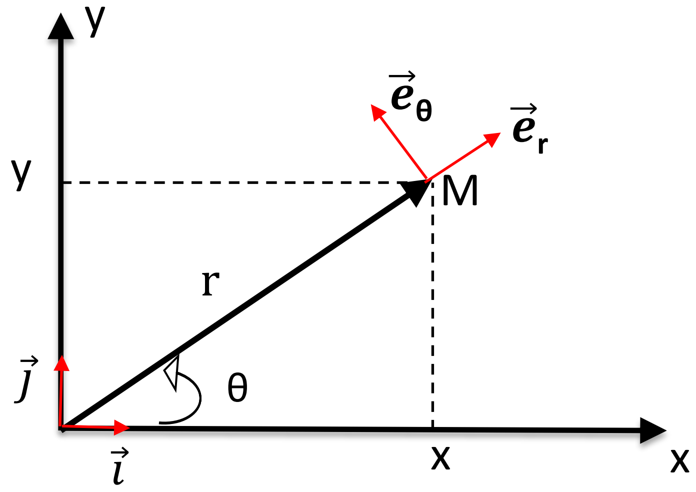
b/ Coordonnées polaires

$M\ (r, \theta) \Rightarrow$ la base polaire est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

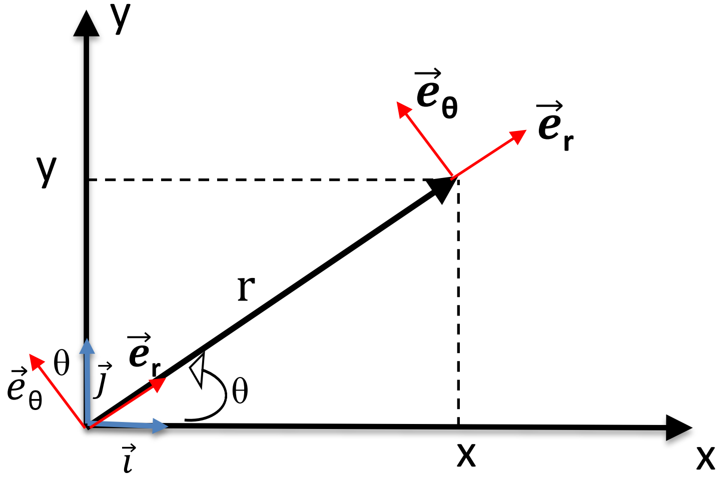
Les coordonnées polaires sont liées aux coordonnées cartésiennes par :

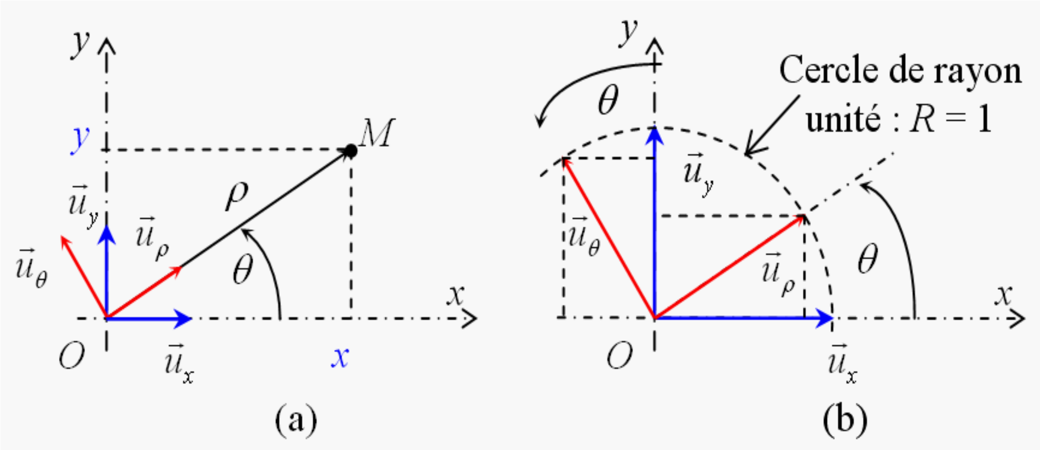
$$x = r\cos\theta \qquad\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



$$\vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$

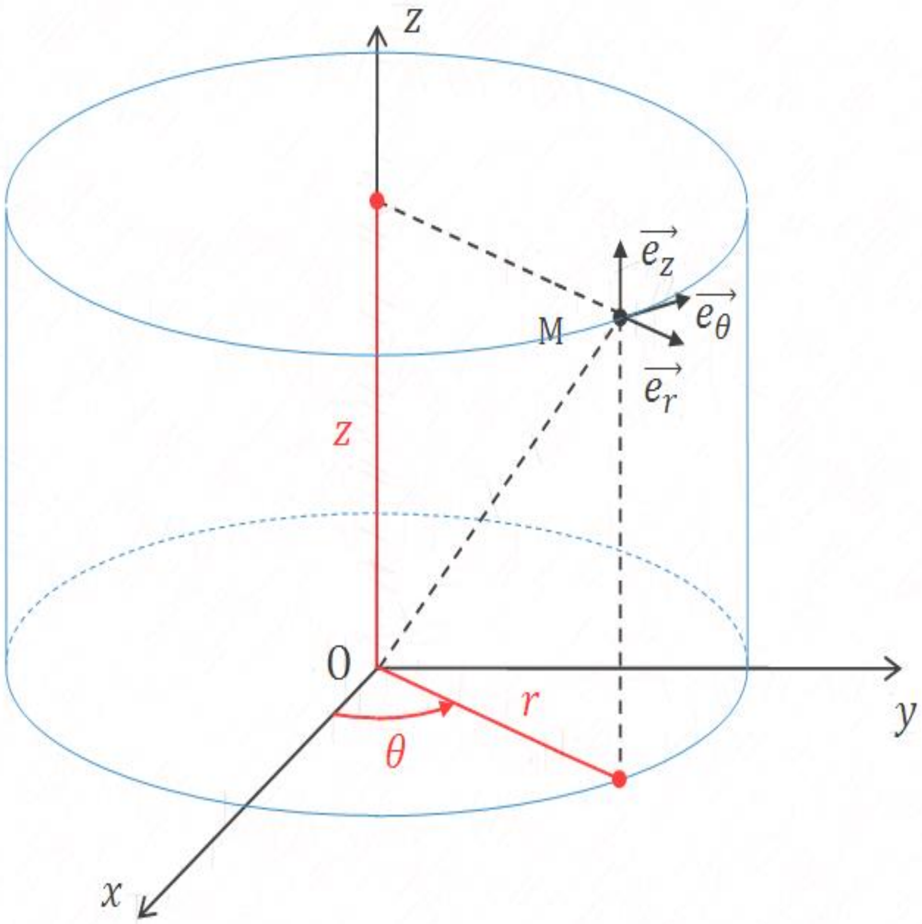
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$





c / Coordonnées cylindriques

M (r ,θ, z) ⇒ la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

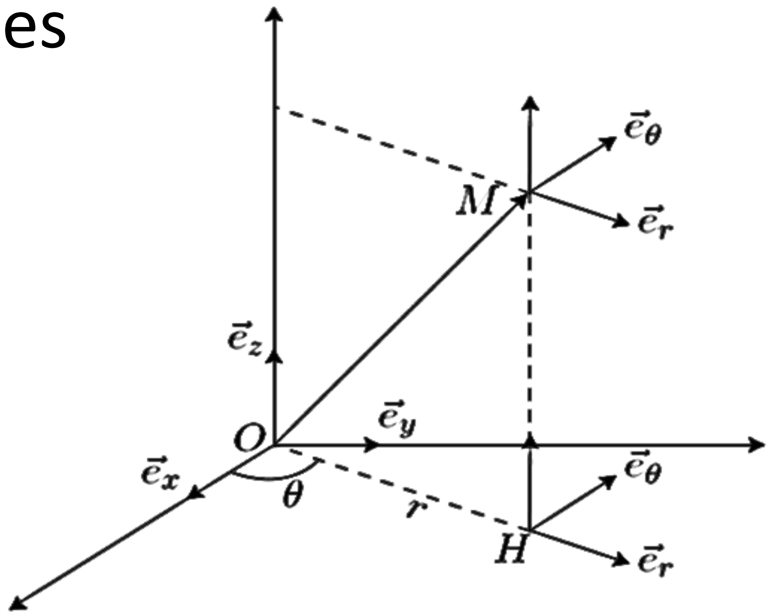


Les coordonnées cylindriques sont liées aux coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Le vecteur position en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

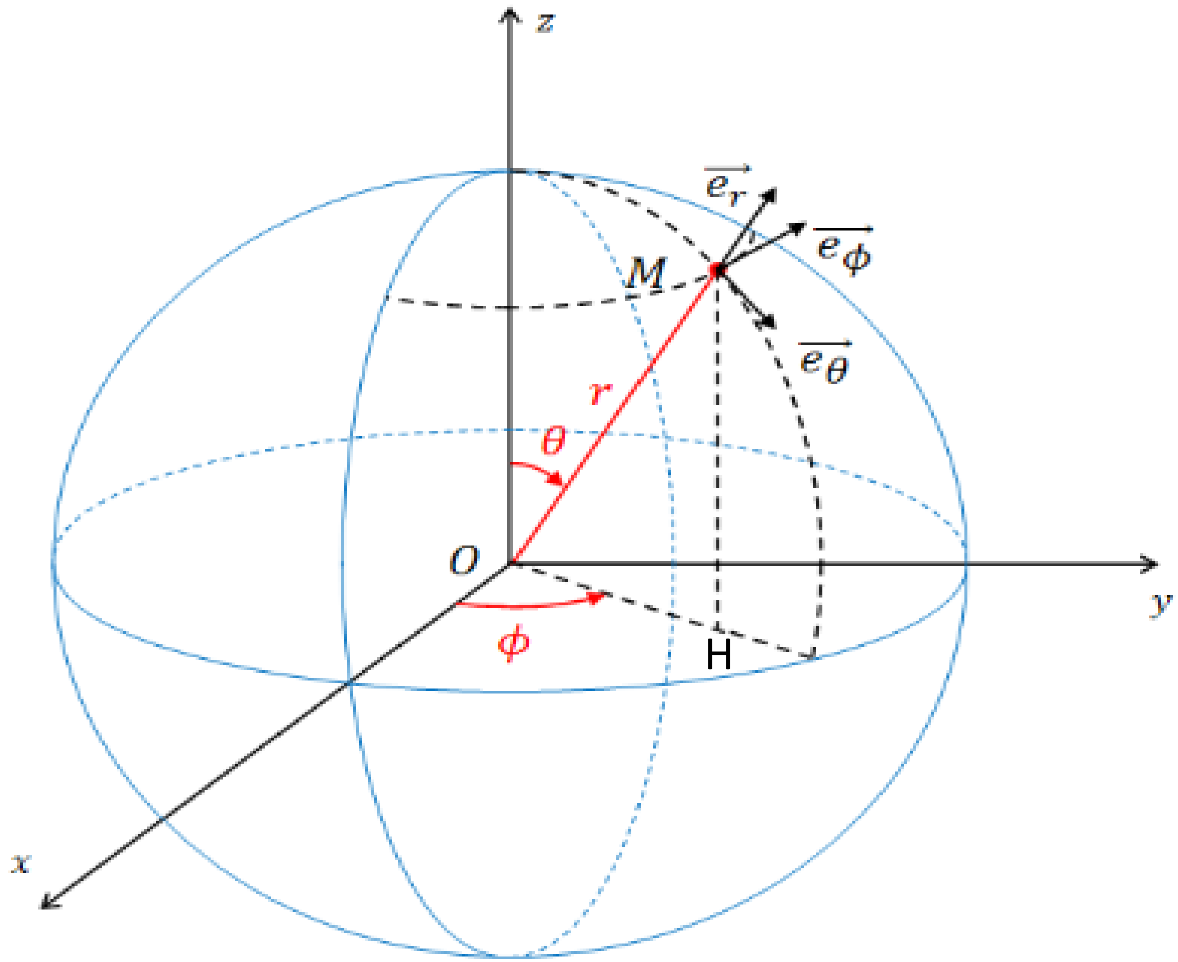


$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}z$$

d / Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques permettent de repérer un point sur une sphère de rayon r

M (r ,θ, ϕ) ⟹ la base sphérique est ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$,$\vec{e}_\phi$)



Les coordonnées sphériques sont liées aux coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} x = OH\cos\varphi \\ y = OH\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \text{avec } OH = r\sin\theta \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Le vecteur position du point M dans la base sphérique est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e}r$$

Chapitre II : Cinématique du point matériel

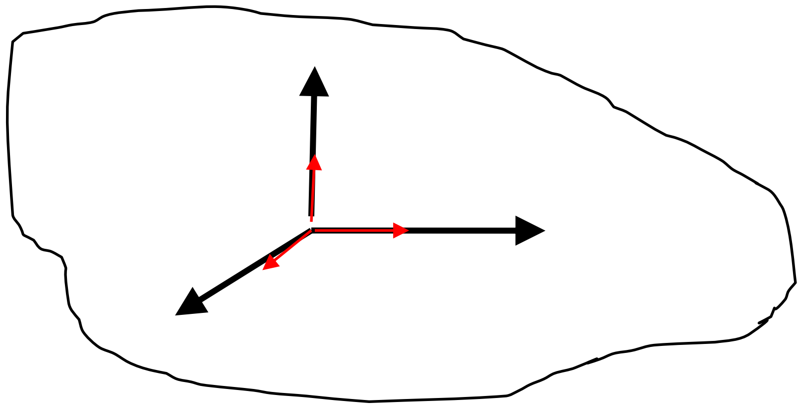
- **II-1 / Généralités** **مفاهيم عامة**
- **II-2 / Repérage d’un mobile**
- **II-2–a/ Vecteur position** شعاع الموضع
- **II-2–b/ Vecteur vitesse** شعاع السرعة
- **II-2–c/ Vecteur accélération** شعاع التسارع
- **II-3/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes**
- **II-4/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées polaires**
- **II-5/ Expression du Vecteur vitesse et accélération en coordonnées cylindriques**عبارة شعاع السرعة والتسارع في الاحداثيات الديكارتية,القطبية و الاسطوانية
- **II-6/ Repère de Frenet** **معلم Frenet**

1 / Généralités

- Le mot cinématique provient du mot grec « Cinéma » qui veut dire mouvement.
- La cinématique est l'étude du mouvement d'un solide, en déterminant sa position, sa vitesse et son accélération.
- La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie et décrit le mouvement d'un objet considéré comme infiniment petit qu'on appelle point matériel on le note M, sa masse est m.

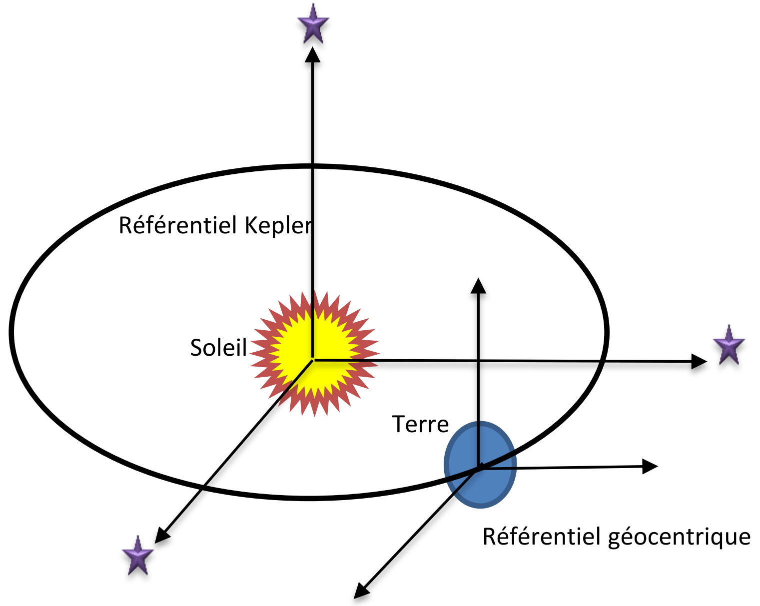
II-2 / Repérage d'un mobile

- L'ensemble des points décrit par le point M au cours du temps est appelé trajectoire المسار.
- Sur sa trajectoire le point M a une vitesse $\vec{V}$ et une accélération $\vec{a}$.
- Pour étudier le mouvement d'un point on se donne un repère et pour cela on définit un référentiel ou un espace.



- On appelle **repère** un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps “fixes entre eux”,on le caractérise généralement par un point **o** origine du repère choisi conventionellement et muni d’ une base orthonormée.
- Pour définir la position d’un point dans l’espace un observateur utilisera un repère , système de coordonnées qui lui est lié et une horloge pour mesurer le temps
- Ce repère espace-temps est appellé réferentiel

- Le référentiel terrestre est le référentiel le plus utilisé : il est centré en un point de la Terre, et ses axes sont liés à la rotation terrestre .
- Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de masse de la Terre et ses axes sont définis par rapport à trois étoiles suffisamment lointaines pour sembler immobiles.
- Le référentiel de Kepler (ou héliocentrique) est le référentiel centré sur le centre de masse du Soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic .



a/ Vecteur position

- Le vecteur position est donné dans les différents systèmes de coordonnée:
- Coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
- Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- Coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$
- Coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

L'équation de la trajectoire

La relation mathématique qui relie les coordonnées indépendamment du temps est appelée l'équation de la trajectoire $y = f(x)$ ou $r = f(\theta)$

Exemple l'équation d'un cercle est : $X^2 + Y^2 = R^2$

Equation paramétrique ou Equation horaire : ce sont les relations qui nous donnent les distances en fonctions du temps

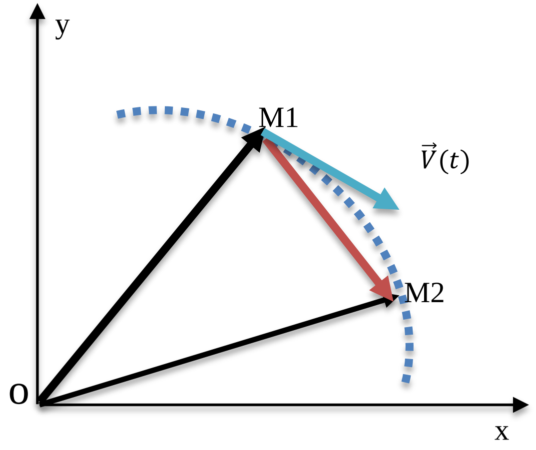
$$X = f(t) \quad ; \quad y = g(t) \quad ; \quad z = h(t);$$

b/ Vecteur vitesse

- La vitesse est une grandeur vectorielle qui donne des informations sur l'évolution de la position d'un point par rapport au temps, son unité m / s.
- Elle doit exprimer la direction instantanée du déplacement du point, le sens du déplacement ainsi que l'amplitude de la variation de ce déplacement.
- La vitesse est une grandeur vectorielle dont la direction est tangente à la trajectoire.

Vitesse moyenne : c'est la distance parcourue par unité de temps

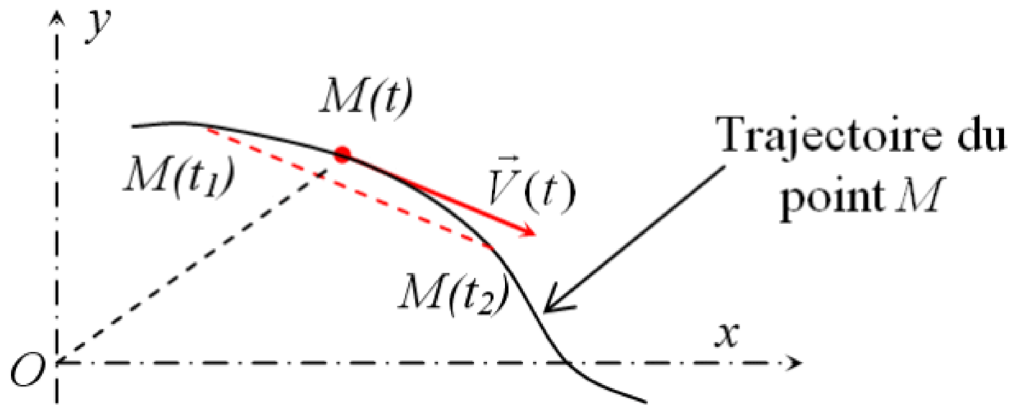
$$\vec{V}m = \frac{\overrightarrow{M1M2}}{t2-t1} = \frac{\overrightarrow{OM2} - \overrightarrow{OM1}}{\Delta t}$$



Vitesse instantanée : c'est la vitesse à un instant t, elle peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position M_1 du point à l'instant t et la position M_2 de ce même point à l'instant (t + Δt) ou Δt représente une durée très faible.

$$\vec{V}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\overrightarrow{OM}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}\,(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La vitesse moyenne d'un point M tend vers la vitesse instantanée à linstant t lorsque Δt tend vers 0. Lorsque M_2 tend vers $M_{1,}$ la corde $M_1\,M_2$ tend vers la tangente à la trajectoire au point M d'où le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

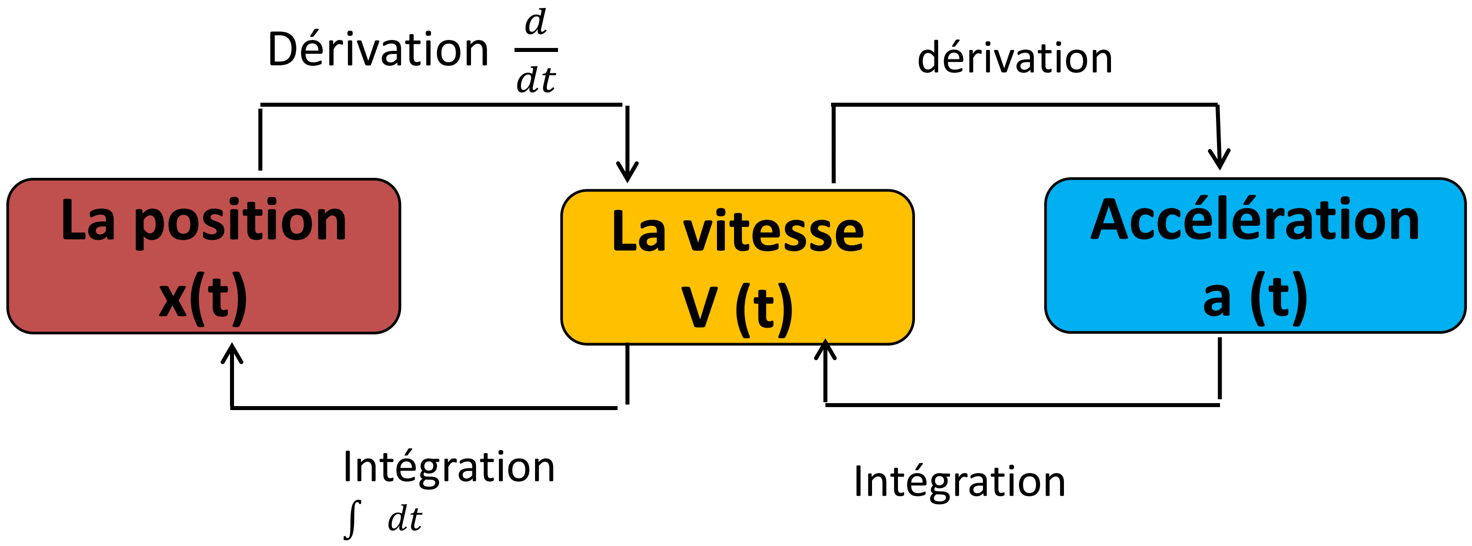


c/ Vecteur accélération

- Tout comme le vecteur vitesse nous renseigne sur la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération nous renseigne sur les variations du vecteur vitesse par rapport au temps.
- Le vecteur accélération représente donc la dérivée première par rapport au temps du vecteur vitesse ou bien la dérivée seconde du vecteur position.

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\acute{t} - t} = \lim_{t' \to t} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \; \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Les trois équations horaires, qui sont la position x(t), la vitesse $\vec{V}$(t) et l'accélération $\vec{a}$ (t), sont des fonctions au sens mathématique qui peuvent se déduire les unes des autres par dérivation et intégration.



3/Expression du Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

- Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes est donné par :
- $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$
- $\vec{V}(t) = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

$\vec{V}(t) = V_x\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{V}(t) = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} + \dot{Z}\vec{k}$

- La base cartésienne étant une base fixe au cours du temps, ses vecteurs unitaires sont donc indépendants du temps et leur dérivée par rapport au temps est nulle.

II-4/ Expression du Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

- Le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k})$$

La base cartésienne étant une base fixe au cours du temps, ses vecteurs unitaires sont donc indépendants du temps et leur dérivée par rapport au temps est nulle.

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_Y \vec{j} + a_Z \vec{k} \qquad \vec{a}(t) = \ddot{X} \vec{i} + \ddot{Y} \vec{j} + \ddot{Z} \vec{k}$$

5/ Expression du Vecteur vitesse en coordonnées polaires

- $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ avec $\overrightarrow{OM}$ en Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{V}(t) = \dfrac{d}{dt}(\, r\,\vec{e}_r\,) = \dot{r}\ \vec{e}_r + r\dfrac{d}{dt}\vec{e}r$

Rappel mathématique:

Règle de dérivation d'une fonction composée :

Si on a f =f(y) et y= f (x) alors on a :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Dans notre cas y est l'angle θ et x représente le temps .

Donc : $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \frac{d}{d\theta}\vec{e}_r \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \ \frac{d}{d\theta}\vec{e}_r$ Avec :

- $\vec{e}_r = \cos\theta \ \vec{i} + \sin\theta \ \vec{j}$; $\frac{d\vec{e}r}{d\theta} = -\sin\theta \ \vec{i} + \cos\theta \ \vec{j} =$
- $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \ \vec{i} + \cos\theta \ \vec{j}$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = = -\cos\theta \ \vec{i} - \sin\theta \ \vec{j}$
  $- \vec{e}_r$
- $\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\theta} \ \vec{e}_\theta$ et $\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \ \vec{e}_r$

Et donc l'expression de la vitesse en coordonnées polaires $\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r} \ \vec{e}_r$

$+ r\frac{d}{dt}\vec{e}_r$ Devient :

$\boldsymbol{\vec{V}(t) = \dot{r} \ \vec{e}_r + r\dot{\theta} \ \vec{e}_\theta}$

6/Expression du Vecteur accélération en coordonnées polaires

- $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta)$
- $= \ddot{r}\ \vec{e}_r + \dot{r}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\ \ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\ \dot{\theta}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_\theta$
- $\vec{a}(t) = (\ \ddot{r}\ -\ r\,\dot{\theta}^2\ )\ \vec{e}_r + (\ 2\dot{r}\ \dot{\theta}\ +\ r\ \ddot{\theta}\ )\ \vec{e}_\theta$

c/ Expressions des vecteurs de position et vitesse en coordonnées cylindriques :

- **vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$ ou $\vec{e}_z = \vec{k}$

  vecteur vitesse : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$\rightarrow$ $\vec{V}(t) = \dfrac{d}{dt}(\, r.\vec{e}_r + z\vec{k}) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dfrac{d}{dt}\vec{e}r + \dot{z}\,\vec{k}$

avec : $\dfrac{d}{dt}\vec{e}_r = \dot{\theta}\;\vec{e}_\Theta$ *et* $\dfrac{d}{dt}\vec{e}_\vartheta = -\dot{\theta}\;\vec{e}_r$

Donc l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{V}(t) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\;\vec{e}_\Theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\ \vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta) = \ddot{r}\ \vec{e}_r + \dot{r}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta$$

$$+ r\,\dot{\theta}\ \frac{d}{dt}\vec{e}_\vartheta + \ddot{z}\ \vec{k}$$

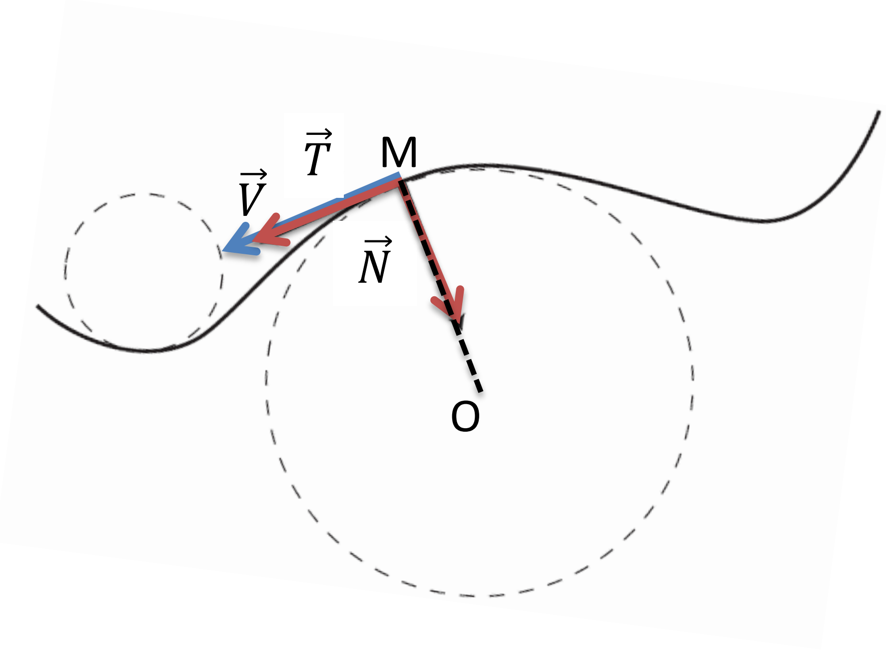
$$\vec{a}(t) = (\ \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\ )\ \vec{e}_r + (\ 2\dot{r}\ \dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\ )\ \vec{e}_\vartheta + \ddot{z}\vec{k}$$

Repère de frenet

- Il s'agit d'un repère qui se déplace avec le mobile M ; les vecteurs de base varient par rapport au référentiel galiléen lors du déplacement du point mobile.

Les caractéristiques du repère de Frenet sont :

- son origine est le point mobile M ;



• le vecteur unitaire $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire en M et orienté dans le sens positif ;

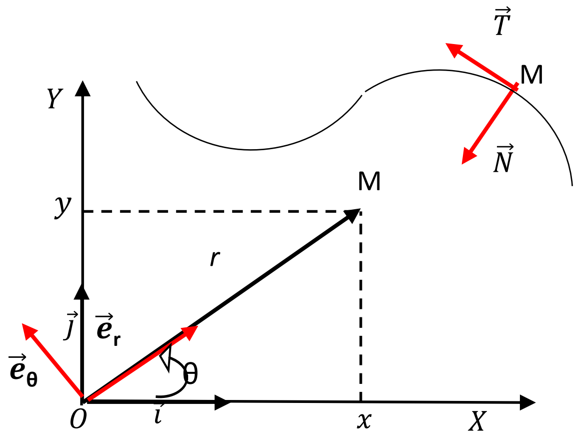
• le vecteur unitaire $\vec{N}$ est normal à la trajectoire en M (et donc aussi à $\vec{T}$) et orienté vers l'intérieur de la courbure de celle-ci.

Noté repere (M, $\vec{T}$, $\vec{N}$)

Vecteur vitesse : Comme le vecteur vitesse $\vec{V}$ est tangent à la trajectoire, son expression dans la base de Frenet est : $\vec{V}$ = V $\vec{T}$ + 0 $\vec{N}$ où V est la valeur algébrique de la vitesse en M. ainsi : $\vec{V}$ = V $\vec{T}$

- **Vecteur accélération** : le vecteur accélération dans la base de Frenet revient à déterminer les coordonnées tangentielle a_T et normale a_N définies par: $\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$.

- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{T} + \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$
- et:
- $\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$
- Donc. $a_T = \dfrac{dv}{dt}, \quad a_N = \dfrac{v^2}{R}$



$\vec{T} = \vec{e}_\theta$ $\vec{N} = \vec{e}_r$

Chapitre III : Etude des mouvement

1. **Mouvement rectiligne** **الحركة المستقيمة**

1/a. Mouvement rectiligne uniforme (MRU) الحركة المستقيمة المنتظمة

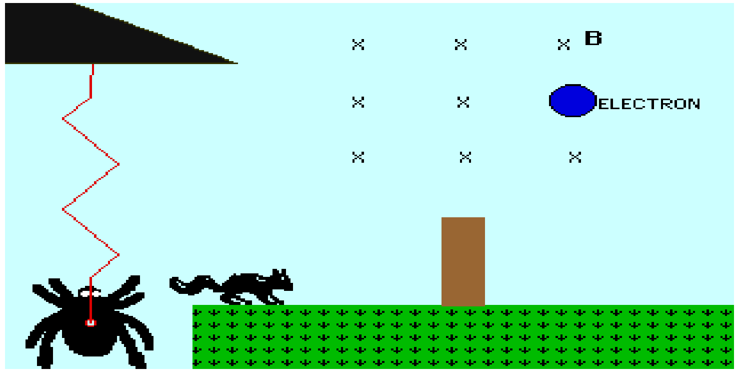
1/b. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV) الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

2. **Mouvement circulaire** **الحركة الدائرية**

2/a. Mouvement circulaire uniforme الحركة الدائرية المنتظمة

2/b. Mouvement circulaire uniformément varié الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام

3. **Mouvement rectiligne sinusoïdal** **الحركة المستقيمة الجيبية**
4. **Mouvement parabolique الحركة**



1- Mouvements Rectilignes :(الحركات المستقيمة)

Un point matériel M est en mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite dans le référentiel $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ confondue sur un seul axe de cette référence ou s'effectue le mouvement de point M. Donc nous n'avons besoin que d'un seul paramètre pour définir la position du point M (ox par exemple)

1-1- Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : (الحركة المستقيمة المنتظمة)

Un point matériel est en mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant $V=V_0=\dot{X}$ = constante, donc son vecteur accélération nul (a $= \frac{dv}{dt} = 0$).

1.1 Equation horaire du mouvement : on choisit l'axe OX comme repère rectiligne.

On a ; $V=V_0=\dot{X}$ = constante donc $\vec{V}(t) = V_0\vec{\imath}$

$$\rightarrow V = V_0 = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = V_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} x = \int_0^t V_0 dt$$

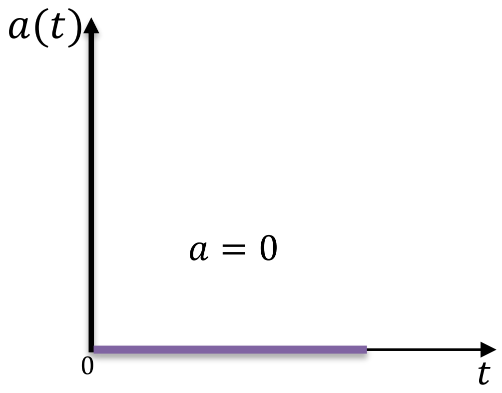
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x(t) = V_0 t + x_0}$ est l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme.

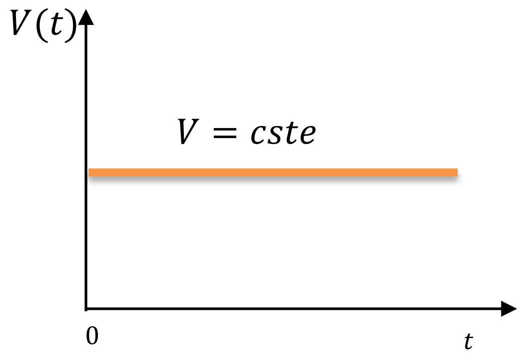
Avec x_0 est une constante d'intégration qui se détermine à partir des conditions initiales.

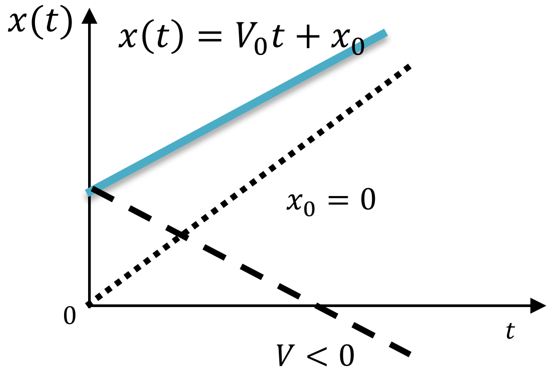
1,2 Diagrammes du mouvement مخططات الحركة

- l'accélération : a = 0 m/s^2, - la vitesse : V=V_0= cste

et le déplacement en fonction du temps : $x(t) = V_0 t + x_0$







1-2- Mouvement rectiligne uniformément varie (MRUV)
(الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام)

- Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa

<u>trajectoire</u> est une <u>droite</u> et son <u>accélération</u> est <u>constante</u>. $\vec{a} = a_0\vec{\imath} = cste$

- En considérant les conditions initiales (t=0, V(0)= V_0).
- $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow d\vec{V} = a_0\vec{\imath}\,dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} d\vec{V} = \int_0^t a_0\vec{\imath}\,dt$
- $\Rightarrow \vec{V}(t) = (a_0\,t + V_0)\vec{\imath}$
- On obtient alors l'équation de la vitesse instantanée : $V(t) = (a_0\,t + V_0)$

1.2.1. Equation horaire du mouvement :

- Si on prend aussi les conditions initiales (pour t=0, $x(0) = x_0$ et V(0) = V_0).

et partant de l'équation : $V(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx(t) = \int_0^t V(t)dt$

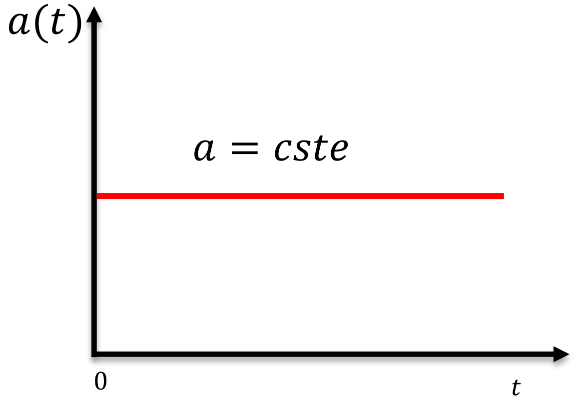
$= \int_0^t (a_0\, t + V_0)dt$

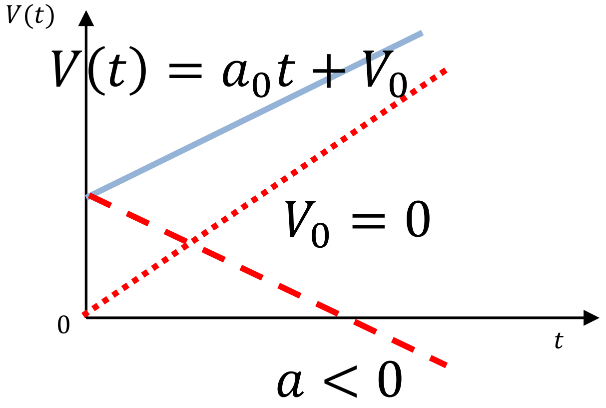
- L'équation horaire est donc : $x(t) = (\frac{1}{2}a_0t^2 + V_0t + x_0)$

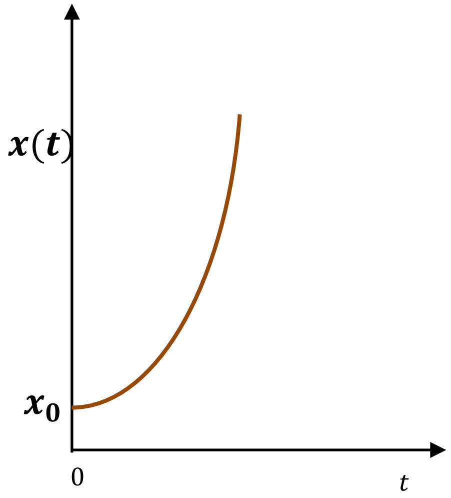
Donc les équations du MRUV : $\begin{cases} a = a_0 = cste \\ V(t) = (a_0\, t + V_0) \\ x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + V_0t + x_0 \end{cases}$

1,2 Diagrammes du mouvement مخططات الحركة

les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié relatifs à l’accélération, la vitesse et le déplacement sont représentés dans la figure suivante.







Le mouvement rectiligne est <u>accéléré</u> si $\vec{a}.\vec{V} > 0$, et il est <u>retardé</u> si $\vec{a}.\vec{V} < 0$.

- **Relation entre vitesse et accélération indépendamment du temps** :

- $$\boldsymbol{V^2 - V_0^2 = 2\, a_0(x - x_0)}$$

- Démonstration :

- On a : $V = a_0 t + V_0 \Rightarrow \; t = \frac{V - V_0}{a_0}$

- En remplace t dans l'expression de $x(t)$:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{V - V_0}{a_0}\right)^2 + V_0 \left(\frac{V - V_0}{a_0}\right)$$

- $\Rightarrow x - x_0 = \frac{(V - V_0)^2}{2a_0} + V_0 \left(\frac{V - V_0}{a_0}\right) \Rightarrow \; x - x_0 = \frac{(V - V_0)[V - V_0 + 2V_0]}{2a_0}$

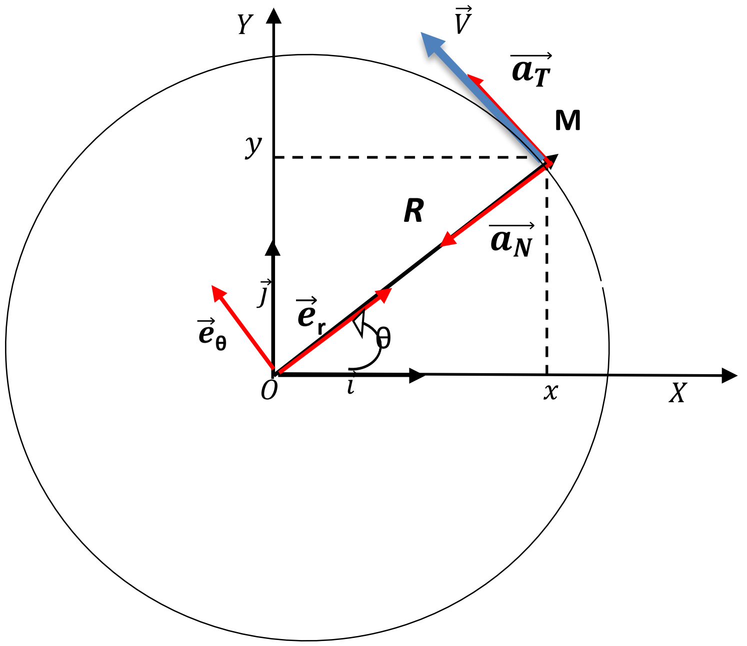
- $$\Rightarrow \boldsymbol{2a_0(\, x - x_0) = \; V^2 - V_0^2}$$

2. Mouvements circulaire (الحركات الدائرية)

- Si le mouvement du point M est circulaire ou la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées cartésiennes soit par les coordonnées polaires.
- **2.1. Vecteur position du mobile :** la trajectoire du point M est un cercle de centre O et de rayon R = cost.
- La position du mobile en coordonnées cartésiennes est définie par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- Mais en coordonnées polaires le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$. Ce système de coordonnées est bien adapté pour ce type du m^{vt}.

Les équations du M^{vt} s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + R\dot{\theta}\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$



$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

2.1.1. Comparaison entre les deux expressions de l'accélération du MC dans la base de Frenet et dans la base polaire.

Repère de Frenet : $\vec{a} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$

$a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = \frac{v^2}{R}$ Avec : $\vec{N} = -\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{T} = \overrightarrow{e_\theta}$

MC base polaire : $\vec{a} = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$

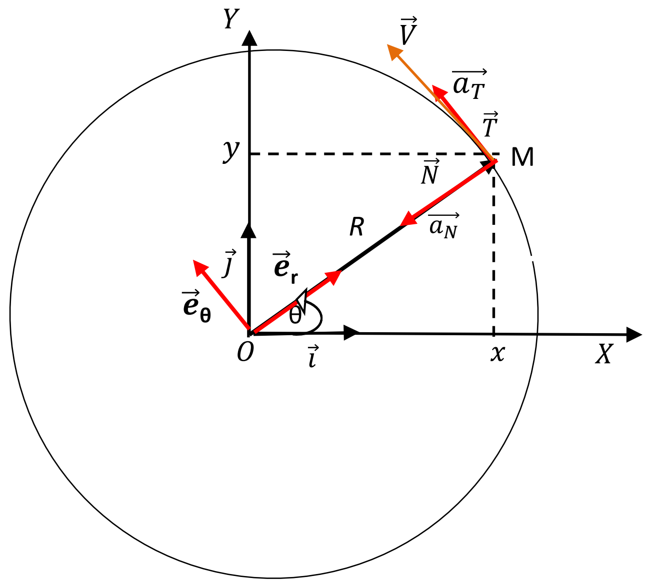
Par identification :

$a_T = \mathrm{R}\ddot{\theta}$ et $a_N = R\dot{\theta}^2$

or $\vec{V} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}$ et $V = R\omega \rightarrow \omega = \frac{V}{R}$

$\frac{dV}{dt} = R\dot{\omega} = R\ddot{\theta} \rightarrow a_T = \frac{dV}{dt}$ et

$a_N = R\dot{\theta}^2 = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R}.$



2.1. Mouvements circulaire uniforme (MCU) (الحركات الدائرية المنتظمة) :

Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ est constante. On a alors les équations du MCU :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

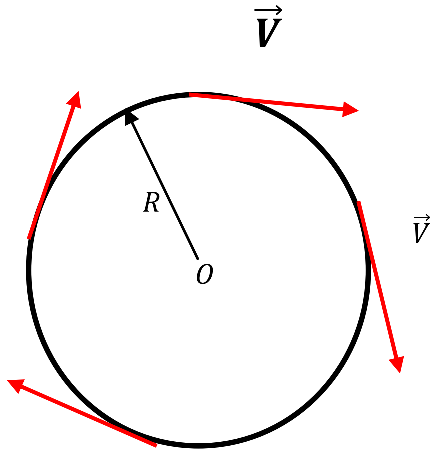
la vitesse est tangentielle ($R\dot{\theta} = V$)

Et puisque $\dot{\theta} = \omega = cste$ alors $\ddot{\theta} = 0$ et $a_T = 0\ et\ \vec{a} = \overrightarrow{a_N}$ donc l'accélération est normale ou centripète.

L'équation horaire du Mvt est : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \dot{\theta}\, t + \theta_0 = \omega t + \theta_0$

En effet : $\dot{\theta} = \omega = cte$ et V est constante en norme et non pas en direction ($\vec{V}$ *variable*), donc, l'accélération n'est pas nulle.

Ou $a = a_N$.



2.2. Mouvements circulaire uniformément varie (MCUV) :
(الحركات الدائرية المتغيرة بانتظام)

- Le mouvement circulaire uniformément varie est caractérisé par une trajectoire circulaire et une accélération angulaire $\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ est constante.

- $$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} \\ \vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \mathrm{R}\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \end{cases}$$

- L'équation horaire du M^{vt} : $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cost$
- $\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}(t) = \int_0^t \ddot{\theta}_0 dt \quad \Rightarrow \ \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0$
-
- et $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0) dt$

$-\Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_0 t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

Si:

$-\ddot{\theta}.\,\dot{\theta} < 0$ MC deceleré

$-\ddot{\theta}.\,\dot{\theta} < 0$ MC acceleré

2.2.1. Comparaison entre MCU et MCUV :

	M^{vt} Circulaire uniforme	M^{vt} Circulaire uniformément varie
Accélération angulaire **التسارع الزاوي**	$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = 0$	$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cste$
Vitesse angulaire **السرعة الزاوية**	$\dot{\theta} = \omega = cste$	$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_0 t + \dot{\theta}_0$
Déplacement angulaire **الفاصلة الزاوية**	$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ $\theta(t) = \dot{\theta} t + \theta_0 = \omega t + \theta_0$	$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$

3. Mouvement Rectiligne Sinusoïdal
الحركة المستقيمة الجيبية

- Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)}$$

ou $\boldsymbol{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$

- X_m: Amplitude ou élongation maximale.
- X : Élongation ou abscisse instantanée, elle varie entre deux valeurs extrêmes $-X_m\ et + X_m$.
- ω : Pulsation du mouvement, son unité est le radian/seconde.
- φ: Phase initiale son unité est le radian.
- $(\omega t + \varphi)$: Phase instantanée, son unité est le radian.

- **La vitesse :** En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée :
- $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad = \quad \dot{x}(t) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi)$
- Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes : $\pm\, \omega X_m$
- **L'accélération** : En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :
- $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi)$
  - L'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé :

$$\boldsymbol{\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)}$$

Avec : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation

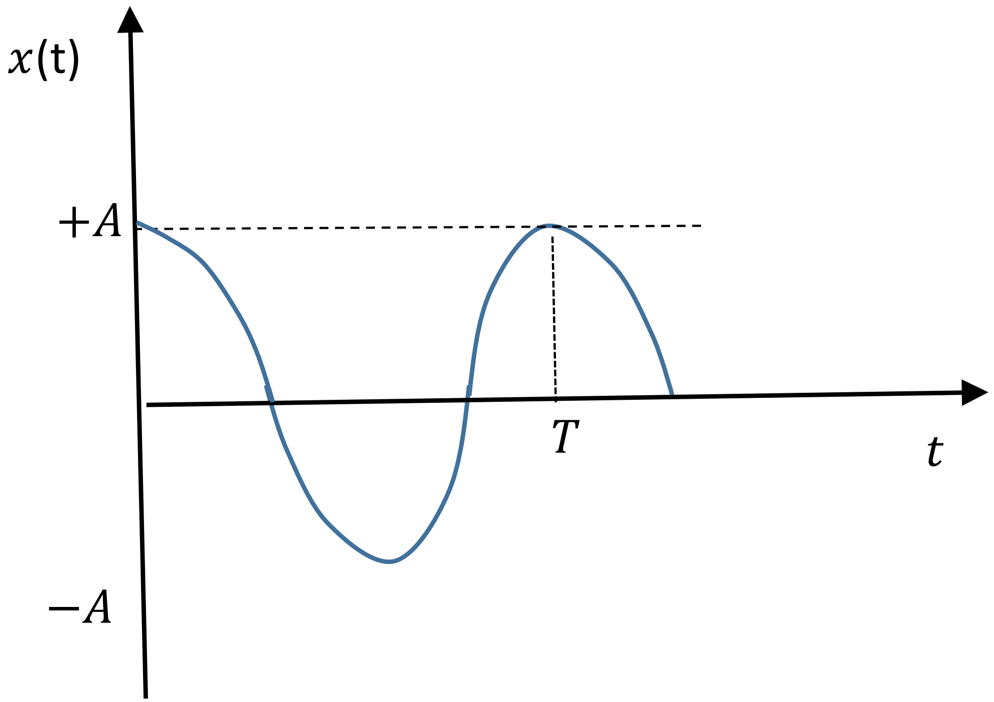
T : période du mouvement en seconde

$f = \frac{1}{T}$ est la fréquence de pulsation en Hertz

Exemple : Masse accroché à un ressort

Equation différentielle du mvt :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



La solution mathématique de cette eq diff est : $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

A: Amplitude

φ: Déphasage (la phase initiale)

Ou pendule simple :

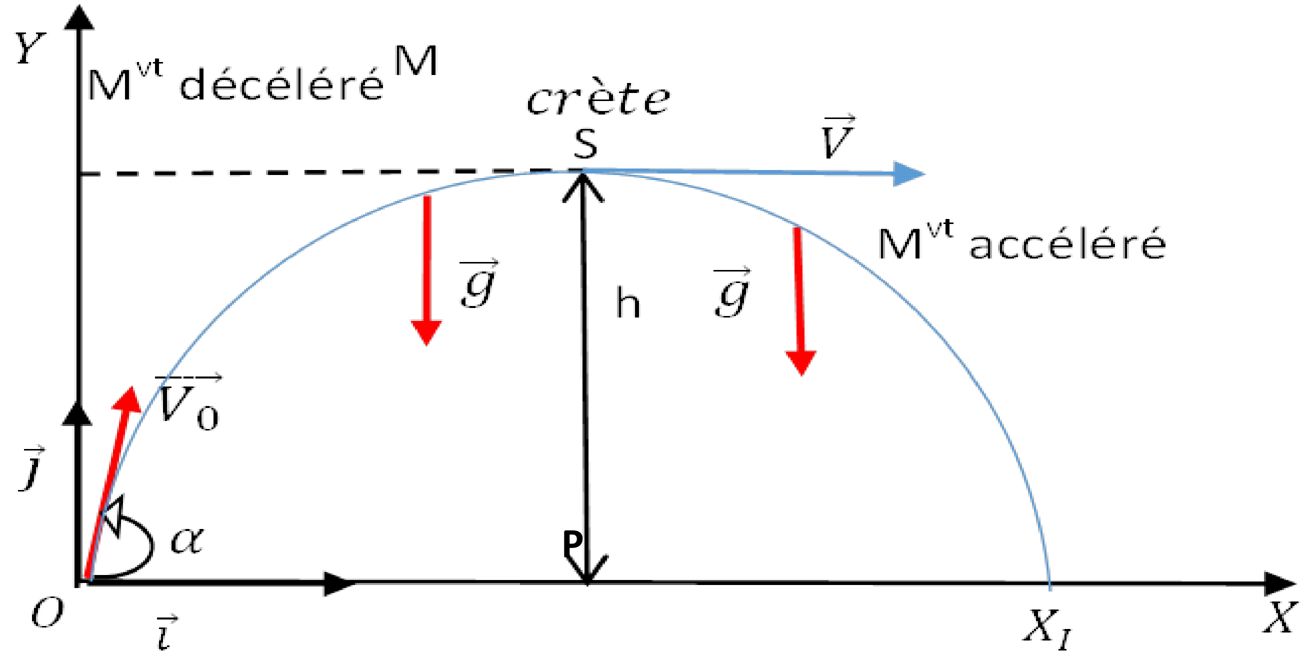
Equation différentielle du mvt : $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta(t) \rightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$

Son équation du mouvement est : $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

4. Mouvement parabolique: mouvement d’un projectile (حركة قذيفة)

- On lance un projectile M dans l’air avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l’horizontale (ox), son mouvement s’effectue dans le plan (xoy), sa trajectoire est parabolique.
- Pour étudier le mouvement de M, on détermine : son accélération, sa vitesse, sa position et sa trajectoire y=f(x).

- On décompose le mouvement de M suivant les deux axes ox et oy :
- Selon **ox** : l'accélération
  $a_x = 0 \Rightarrow V_0 = cste \Rightarrow x(t) = V_{0x}\, t + x_0 \Rightarrow le\ MRU\ suiant\ ox.$
- Selon **oy** : l'accélération
  $a_y = -g \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} a t^2 + V_{0y}\, t + y_0 \Rightarrow le\ MRUV\ suiant\ oy.$



•Les équations horaires du mouvement :

Selon ox :

$$a_x = \ddot{x} = 0 \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow dV_x = 0$$

$$\Rightarrow V_x = cste = C_1$$

$$V_x = V_0 \cos\alpha \;, \qquad \forall t$$

Et $V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int V_x dt$

$$\Rightarrow x(t) = V_0 \cos\alpha \, . t + x_0$$

A partir des conditions initiales :

$t = 0$: $V_x(0) = V_0 \cos\alpha$ **et** $x_0 = 0$.

Donc : $\boldsymbol{x(t) = V_0 \cos\alpha . t}$

Selon oy :

$$a_y = \ddot{y} = -g \Rightarrow \frac{dV_y}{dt} = -g$$

$$\Rightarrow \int dV_y = \int -g dt \qquad \Rightarrow V_y(t) = -gt + C_2$$

A t=0, $C_2 = V_y(0) = V_0 \sin\alpha$

$$\boldsymbol{\Rightarrow V_y(t) = -gt + V_0 \sin\alpha}$$

Et $V_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int dy = \int V_y dt$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \;\; t + y_0$$

$t = 0$: $y_0 = 0$

Donc : $\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha . t}$

Donc les équations horaires du Mvt sont :

- $\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\, sin\, \alpha\, t \end{cases}$, $\vec{V}\begin{cases} V_x = V_0\, cos\, \alpha \\ V_y(t) = -gt + V_0\;\; sin\, \alpha\, t \end{cases}$ et $\vec{a}\begin{cases} 0 \\ -g \end{cases}$

<u>L'équation de la trajectoire</u> **est obtenue en éliminant le temps :**$\boldsymbol{y = f(x)}$

- **On a:** $x(t) = V_0\, cos\, \alpha\, t \Rightarrow t = \dfrac{x}{V_0\, cos\, \alpha}$
- En remplace t dans l'équation de y(t) :
- $y(t) = -\frac{1}{2}g(\dfrac{x}{V_0\, cos\, \alpha})^2 + V_0\, sin\, \alpha\; \dfrac{x}{V_0\, cos\, \alpha}$
- $\boldsymbol{y(t) = -\dfrac{g}{2\, {V_0}^2 cos^2\alpha}x^2 + tan\, \alpha\, .\, x}$
- Sous forme de : $y(t) = Ax^2 + Bx$ c'est l'équation d'une parabole.

- **L'altitude maximale $\boldsymbol{h}$:** $V_y(t_p) = 0$, ou t_p : le temps de pointe.
- $V_y(t_p) = -gt_p + V_0\ sin\alpha = 0 \Rightarrow t_p = \frac{V_0\ sin\alpha}{g}$
- $\boldsymbol{h} = y(t_p) =$ - $\frac{1}{2}gt_p^2 + V_0\ sin\alpha\ t_p$ = - $\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0\ sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{(V_0\ sin\alpha)^2}{g}$
- $\boldsymbol{h} = \frac{(\boldsymbol{V_0\ sin\alpha})^2}{\boldsymbol{2g}}$
- **Le temps pour lequel le projectile atteint le point I :**
- $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow -\ \frac{1}{2}gt_I^2 + V_0\ sin\ \alpha\ t_I = 0$
- $\boldsymbol{t_I}\left(-\ \frac{1}{2}g\ t_I + V_0\ sin\ \alpha\ \right)$ **= 0** $\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t_1 = 0 \quad (origine)} \\ \boldsymbol{t_I} = \frac{2\ V_0\ sin\alpha}{g} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{t_I} = \frac{\boldsymbol{2\ V_0\ sin\alpha}}{\boldsymbol{g}}$

- **Calcul de la portée X_I :**
- On remplace $\mathbf{t_I}$ dans x(t) : $x(\boldsymbol{t_I}) = V_0 \cos\alpha\, \boldsymbol{t_I} = V_0 \cos\alpha \frac{2\, V_0\, sin\alpha}{g}$
- $x(\boldsymbol{t_I}) = \frac{2V_0^2\; cos\;\alpha\; sin\alpha}{g}$
- $on\ a\ : 2\ cos\ \alpha\ sin\alpha = sin2\alpha$, alors : $\boldsymbol{X_I} = \frac{V_0^2\; sin2\alpha}{g}$

- **Calcul de l'angle de tir pour lequel la portée X_I est maximale :**

- $\boldsymbol{X_I} = \frac{V_0^2\; sin2\alpha}{g}$ est max si : $sin\ 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Chapitre IV : Dynamique d'un point matériel
تحريك النقطة المادية

1. Introduction
2. Systèmes étudiés et actions mécaniques
3. Différents types de forces
4. Lois de Newton
5. 1ère loi de Newton (Principe d'inertie)
6. 2ème loi de Newton (Principe fondamentale de la dynamique)
7. 3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques

Chapitre IV : Dynamique

8. Application (le pendule simple)
9. Moment d'une force
10. Moment cinétique
11. Théorème du moment cinétique (TMC)
12. Analogie entre grandeurs de translation et de rotation

Introduction :

La dynamique est une partie de la mécanique qui étudie les systèmes en mouvement en tenant compte des raisons de ces mouvements comme (les forces, les énergies, ..).

- Les grandeurs cinématiques (accélération) et les grandeurs Dynamique (Forces) sont reliées entre elles par la loi fondamentale de la dynamique qui est la 2^{eme} loi de Newton.

- **Systèmes étudiés et actions mécaniques :**
- Un système dynamique est en effet un ensemble d'entités (corps) en interaction, comme une masse accrochée à un ressort, un pendule,…. constituent des exemples de systèmes mécaniques bien connus.
- Les actions mécaniques (les forces) sont les causes des mouvements, elles sont représentées par un vecteur $\vec{F}$.
- L'unité de la force est le Neuton : 1N = 1 $Kg.m.s^2$.

- **Différents types de forces :**
- Il existe deux types de forces :
- **Force d'interaction à distance** : force de gravitation (le poids), force électromagnétique,…
- Un point matériel M de masse m à son poids $\vec{p}$ est une force verticale est dirigé vers le bas $\vec{p} = m\vec{g}$ [N] avec m : masse en Kg et $\vec{g}$ le champ de pesanteur g = 9,81 m/s^2.
- $\vec{p}$ est une force d'attraction gravitationnelle qu'exerce le terre sur le corps M de masse m.
- $\vec{p} = \vec{F}_{terre \longrightarrow M}$

Force de contact : sont des forces agissant mutuellement entre les corps en contact.

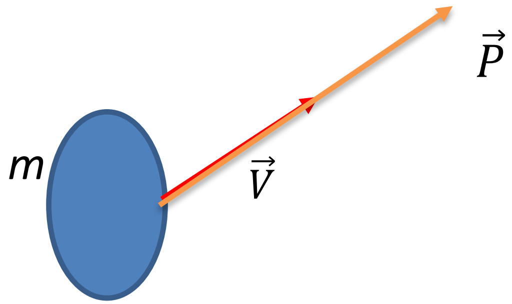
Les différentes forces de contact sont :

- force de frottement solide (entre deux solides en contact)
- force de frottement visqueux entre solide et fluide (liquide ou gaz)
- force de rappel d’un ressort
- tension d’un fil
- Réaction d’un support sur lequel repose le système.

- **Lois de Newton :**
- Les lois de Newton forment les bases de la mécanique classique, elles relient les forces qui agissent sur un system matériel ayant une masse et le mouvement qui en est induit.

  – **Vecteur quantité du mouvement :** $\vec{P} = m\,\vec{V}$

- Le vecteur quantité du mouvement d'un point matériel de masse m est produit de sa masse par son vecteur vitesse instantanée. $\boldsymbol{\vec{P} = m\ \vec{V}}$.
-



- Si Un système mécanique (ensemble de particules), qui ne subit aucune action extérieure (isolé) garde une quantité de mouvement constante.
- Ou si la somme vectorielle des forces s’exerçant sur lui est égale au vecteur nul, on dit que ce système est pseudo isolé.

$1^{ère}$ loi de Newton (Principe d'inertie) : مبدأ العطالة

Un système mécanique n'est soumis à aucune force (isolé) ou pseudo-isolé est :

soit au repos ($\vec{\boldsymbol{V}}$ = $\vec{\mathbf{0}}$ **et** $\vec{\boldsymbol{a}}$ = $\vec{\mathbf{0}}$ $\rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{\mathbf{0}}$.

Soit en mouvement rectiligne uniforme.

$\vec{\boldsymbol{V}}$ **= Cste** $\rightarrow \vec{\boldsymbol{P}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}} \rightarrow \dfrac{\boldsymbol{d\vec{P}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\mathbf{0}}$ donc la quantité du mouvement est conservée. $\vec{P} = \vec{P'}$

- Par exemple : Dans un atome d'hydrogène (système isolé), la quantité de mouvement des deux particules (proton + électron) reste constante tout le temps.
- Et le principe fondamental de la statique est : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Le référentiel R dans lequel la première loi de Newton est vérifiée est le référentiel terrestre (Galiléen).

2ème loi de Newton (Principe fondamentale de la dynamique)

Si un système mécanique soumis à des actions mécaniques (forces extérieurs), la quantité du mouvement d'un système mécanique change donc n'est plus conservée.

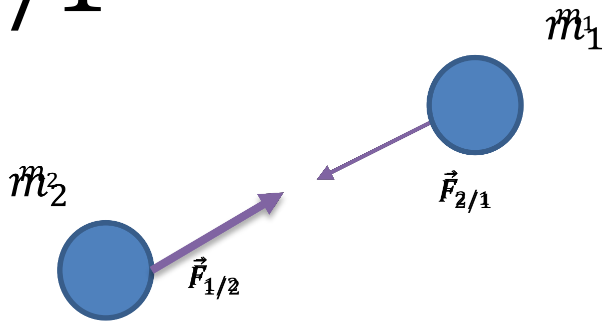
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \rightarrow \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d(\vec{V})}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{ext}$$

Dans le cas où on aurait plusieurs forces : $\sum \vec{F}_{ext} = \boldsymbol{m\vec{a}}$

1.3ème loi de Newton (Principe des actions réciproques)

Lorsque deux systèmes mécaniques sont en influence mutuelle, la force appliquée par le premier système sur le deuxième $\vec{F}_{1/2}$ est égale et de signe **opposé** à la force appliquée par le deuxième système sur le premier $\vec{F}_{2/1}$.

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

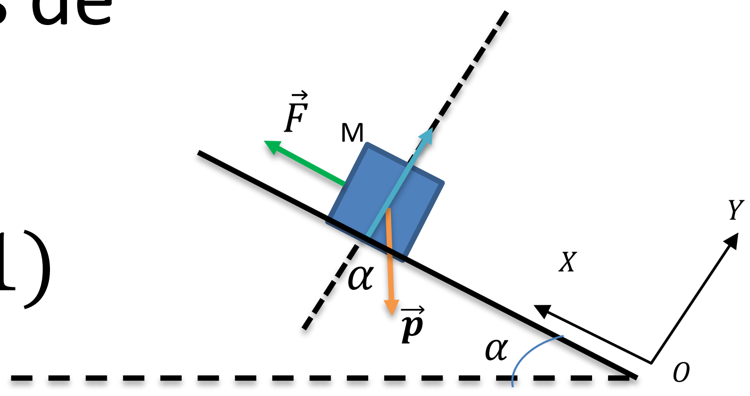


Applications :

1-Plan incliné

- Un corps de masse m = 100 Kg est tiré vers le haut avec une force $\vec{F}$ sur une distance de 10 m, le long d'un plan incliné de 45° par rapport à l'horizontale. Les frottements étant négligeables
- et le mouvement accéléré d'accélération a = 5 ms^{-2}. g=10 ms^{-2} . déterminer la force $\vec{F}$

- La deuxième loi de Newton permet d'écrire :
- $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$
- Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes :



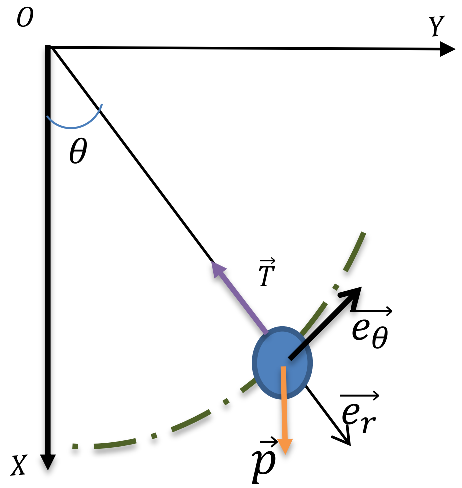
- $\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_x = F - P\sin\alpha = ma \qquad (1)$
- $\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_y = R - P\cos\alpha = 0 \qquad (2)$
- L'équation (1) permet d'écrire :
- $F = ma + P\sin\alpha = m(a + g\,\sin 45°) = 100\left(5 + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 1207.107$ N.

2- Pendule simple :

- Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur l, à son extrémité libre auquel est accroché une masse m considéré ponctuelle. A l'instant t = 0, on écarte la masse de sa position initiale de θ_0 et on la lâche sans vitesse initiale.
- En utilisant le principe fondamentale de la dynamique et la base polaire, déterminer l'équation horaire du mouvement.

- D'après le PFD on a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$
- $\vec{p} + \vec{T} = m\vec{a}$
- En projetant sur la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, on aura :
- $\begin{cases} mg\ cos\theta - T = m\ a_{\vec{e}_r} & (1) \\ -mg\ sin\theta = m\ a_{\vec{e}_\theta} & (2) \end{cases}$



- **En coordonnées polaires :**
- **Le vecteur position**
- $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r}$ où $r = l = cste$

Le vecteur vitesse

$$\vec{V} = l\,\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = l\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Vecteur accélération en coordonnées polaires avec *r* constant s’écrit par :

$$\vec{a} = \frac{dl\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -l\dot{\theta}^2\ \vec{e}_r + l\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \qquad (3)$$

Donc $a_{\vec{e}_r} = a_N = -l\dot{\theta}^2\ et\ a_{\vec{e}_\theta} = a_T = l\ddot{\theta}$

En substituant l’expression de $a_{\vec{e}_\theta}$ dans l’eq (2), on obtient :

$$-mg\,sin\theta = m\,l\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Si θ suffisamment petite alors $sin\theta \approx \theta$, pour un oscillateur harmonique.

L'équation différentielle devient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Sous forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation propre du mouvement.

L'équation du mouvement du pendule est une équation différentielle de deuxième ordre sans second membre.

La solution de cette équation est :

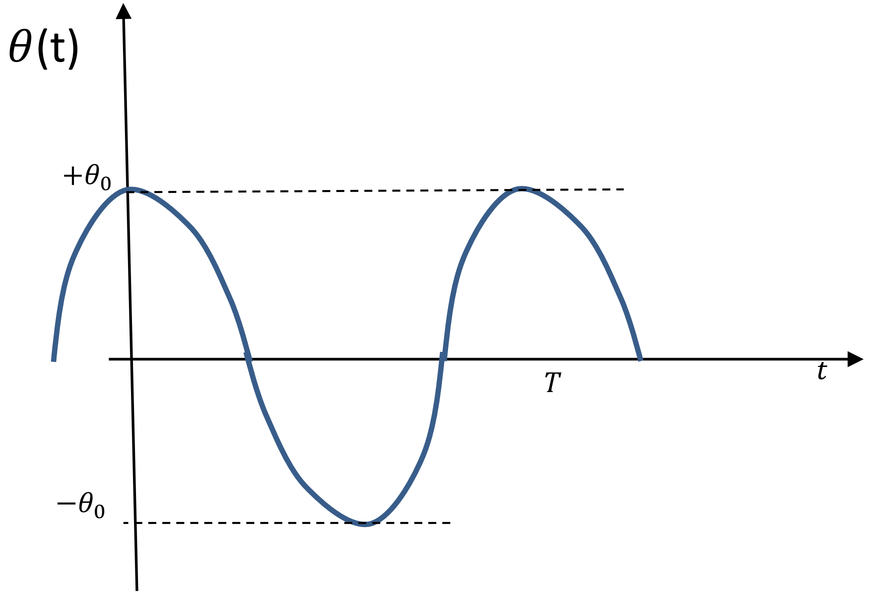
$\theta(t) = A\, cos\omega_0 t + B\, sin\omega_0 t$ (d'après **Euler**), est une équation horaire sinusoïdale d'un système libre non-amorti.

Les constantes A et B sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

à t =0, $\theta(t) = \theta_0 = A\, cos0 + B\, sin0 \Rightarrow A = \theta_0$

et $V(t = 0) = \dot{\theta}(0) = 0 = -A\omega_0 sin0 + B\omega_0 cos0 \Rightarrow B = 0$

$$\theta(t) = \theta_0\, cos\omega_0 t$$



Avec : θ_0: amplitude en (rad)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$: Pulsation propre en (rad/s)

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$: La période en (s)

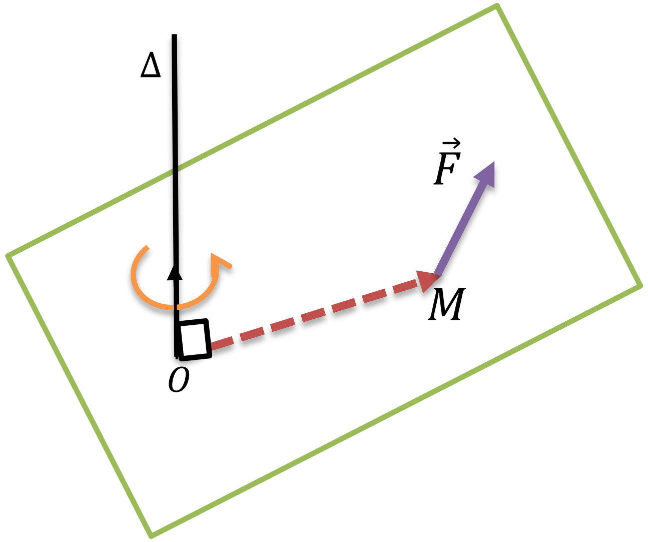
Moment d'une force : عزم القوة

- Soit la figure ci-contre où Δ est un axe de rotation de vecteur unitaire $\vec{u}$, et O un point de cet axe :
  On appelle moment d'une force $\vec{\boldsymbol{F}}$ appliquée au point matériel *M* par rapport au point O ou par rapport à l'axe Δ la grandeur vectorielle :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

- $$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O}\left(\vec{F}\right) = OM.F.sin\alpha\ \vec{u}$$

- Son module est : $\mathcal{M}_{/O}\left(\vec{F}\right) = OM.F.sin\alpha$



- l'unité du moment est (N/m)

- Si la force $\vec{F}$ est **parallèle** à $\overrightarrow{OM}$ donc elle n'aucun effet sur la **rotation** de M.

- Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ donc le

  moment de la force est maximal.

Moment cinétique : العزم الحركي

- On appelle moment cinétique $\vec{L}_{/o}$ d'un point matériel de masse m, de quantité de mouvement $\vec{P}$ et situé au point
- M par rapport au point O de l'axe Δ le produit vectoriel :

$$\vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \qquad \text{Or} \qquad \vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{V}$$

- $\vec{L}_{/o}$ est toujours perpendiculaire au plan du mouvement formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et à $\vec{V}$)
- L'unité du moment cinétique est : $kg.m^2/s$

Moment cinétique en fonction du vecteur vitesse angulaire :

Soit un point matériel se déplaçant dans le plan (XOY).

En utilisant les coordonnées polaires, on a :

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et $\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

donc : $\vec{L}_{/o} = r\vec{e}_r \wedge m\,(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)$

- $\vec{L}_{/o} = r\vec{e}_r \wedge m\,\dot{r}\vec{e}_r + r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$
- Et puisque : $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$ et $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{k}$

- Alors : $\vec{L}_{/o} = m\, r^2 \dot{\theta}\, \vec{k} \quad \Rightarrow \vec{L}_{/o} = J_{/o}\, \dot{\theta}\, \vec{k}$
- avec $J_{/o} = \ m\, r^2$

- $\vec{L}_{/o} = J_{/o}\, \vec{\omega}$ ou $\vec{\omega} = \dot{\theta}\, \vec{k}$ est le vecteur vitesse angulaire.

- Et $J_{/o} = m\, r^2$: est appelé moment d'inertie du point matériel en rotation par rapport au point O (son unité kg.m²).

Théorème du moment cinétique (TMC)

En un point fixe O d’un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d’un point matériel est égalela somme des moments des forces par rapport à O appliquées en ce point.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{/o}\right) = \sum \vec{M}_{/0}(\vec{F})$$

- **Démonstration** :
- $\vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$
- On dérive cette expression par rapport au temps :
- $\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{/o}\right) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d}{dt}\vec{V}$

$$= \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{/o}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} \qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{/o}\right) = \sum \vec{M}_{/0}(\vec{F})$$

Analogie entre grandeurs de translation et de rotation

Grandeurs de translation		Grandeurs de rotation	
Déplacement linéaire	x (m)	Déplacement angulaire	θ (rad)
Vitesse linéaire	$\vec{V}$ (m/s)	Vitesse angulaire	$\omega = \dot{\theta}$ (rad/s)
Accélération linéaire	$\vec{a}$ (m/s²)	Accélération angulaire	$\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ (rad/s^2)
Force	$\vec{F}$ (N)	Moment de force	$\vec{M}_{/0}(\vec{F})$ (N.m)
Masse	M (Kg)	Moment d'inertie	$J_{/o} = m\,r^2$ (Kg.m^2)
Quantité de mouvement	$\vec{P} = m\vec{V}$ (Kg.m/s)	Moment cinétique	$\vec{L}_{/o} = J_{/o}\vec{\omega}$
Energie cinétique	$E_C = \frac{1}{2}mV^2$ (J)	Energie cinétique	$E_C = \frac{1}{2}J_{/o}\omega^2$
Principe fondamentale de dynamique (PFD)	$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ (N)	Théorème du moment cinétique (TMC)	$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{/o}\right) = \sum \vec{M}_{/0}(\vec{F})$

Chapitre V : Travail, Puissance & énergie

1. Généralités
2. Travail d’une force
3. Puissance d’une force
4. Energie

Généralités

- 1./ L'énergie est une grandeur fondamentale de la physique; qui permet de résoudre certains problèmes de la mécanique du point par une équation scalaire que l’on pouvait résoudre aussi par la forme vectorielle du principe fondamentale de la dynamique.
- **Travail dune force :**
- Une force qui modifie le mouvement d'un objet qui était initialement au repos; ou provoque sa déformation travail; le travail dune force donc l'effort qu'il faut fournir pour déplacer un objet, on le note W.

- On appelle travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pendant la durée *dt;* le produit scalaire de cette force par le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ noté aussi $\overrightarrow{OM}$.

$$\delta w = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On peut l'exprimer autrement; comme la vitesse est la dérivée du déplacement par rapport au temps.

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} \qquad \text{donc } \overrightarrow{dl} = \vec{V} \cdot dt$$

$$\delta w = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \vec{F} \cdot \vec{V}\, dt$$

- Le travail de la force $\vec{F}$ le long d'un trajet AB est égale à la somme des travaux élémentaires.
- $W(\vec{F})_{A\_B} = \sum \delta W = \int_A^B \delta W$
- $W(\vec{F})_{A\_B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

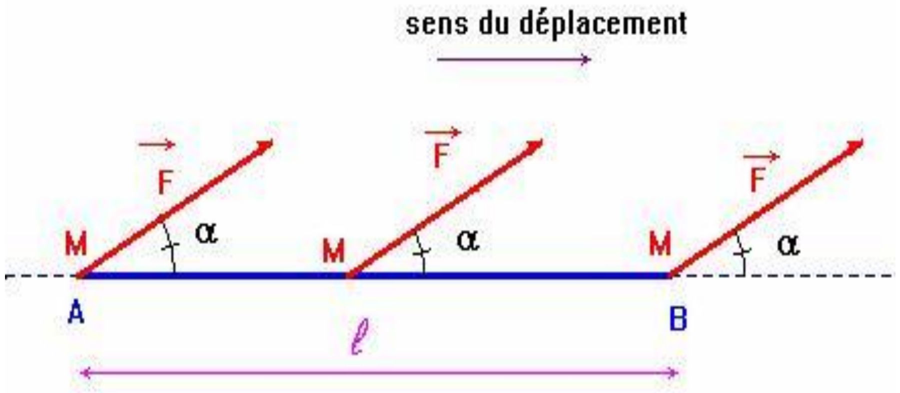
Travail :العمل

1.1. Travail d'une force constante sur un (chemin) déplacement rectiligne :

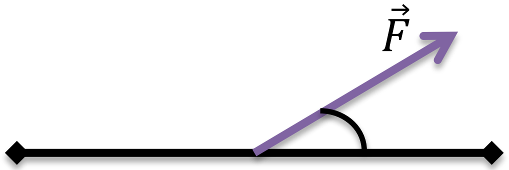
1.1.1 Force constante :

- Une force est constante si sa valeur, sa direction et son sens ne varient pas au cours du temps.
- \- Exemple : le poids d'un objet peut constituer une force constante dans certaines conditions.

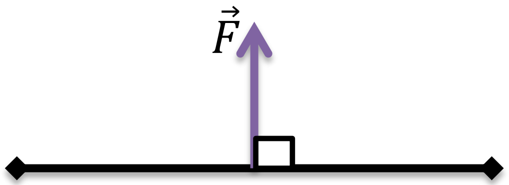
- **1.1.2 Définition du travail**
- Considérons un objet assimilé à un point matériel *M* se déplaçant sur une portion de droite *AB*, d'un point A à un point B, et soumis à une force $\vec{F}$ constante au cours du déplacement.
- Par définition, le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ <u>constante</u> sur un déplacement <u>rectiligne</u> est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement.
- $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{cste}$ sur *AB* = *l* ⇒ $W_{A \to B}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.l.cos\alpha$
- avec α angle que fait $\overrightarrow{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$.
- Le travail W($\vec{F}$) s'exprime en Joule [J].



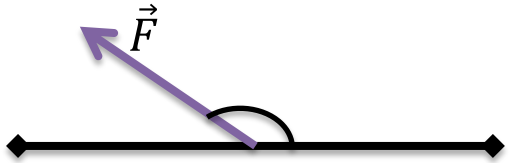
- **Remarque :**
- Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force par rapport au déplacement :
- Si $\vec{F}$ est **perpendiculaire** à $\overrightarrow{AB}$ le travail est **nul**; la force $\vec{F}$ ne contribuant pas à déplacer l'objet.
- Lorsque la force **s'oppose** au déplacement la force est **résistante** et le travail est **négatif**.
- Lorsque la force est **motrice** le travail est **positif** (travail moteur, car la force contribue au mouvement).



W > O



W = O



W ≤<
O

- **Exemple :** Un corps de masse m 1kg est tiré avec une force $\vec{F}$ sur une distance de 10 m, le long d'un plan incliné de 45° par rapport à l'horizontale (voir figure). Les frottements étant insignifiants (négligeables) et le mouvement accéléré, d'accélération a = 1ms^2.
- Calculer les travaux des forces appliquées au corps :

- L'application de la deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

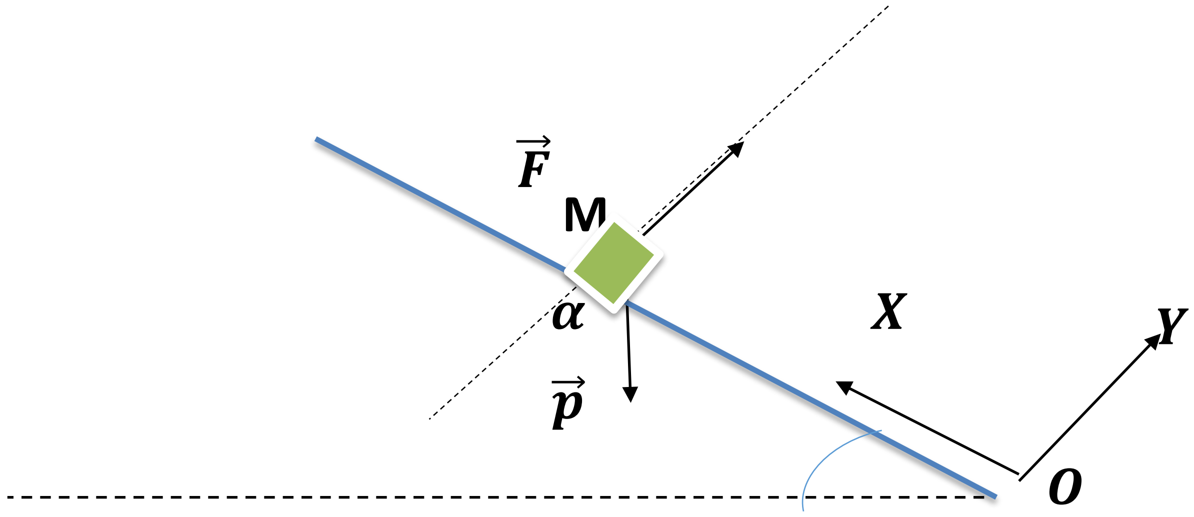
- Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes :

$$\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_x = F - Psin\alpha = ma \qquad (1)$$

$$\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)_y = R - Pcos\alpha = 0 \qquad (2)$$

- L'équation (1) permet d'écrire : $F = ma + Psin\alpha = m(a + gsin45°)$ $= 8.07$ N
- Le travail de $\vec{F}$:
- $$W\left(\vec{F}\right) = F.AB\ cos\ 0 = 8.07.10 = 80.7\ J$$

- Le travail de $\vec{P}$



$$W\left(\vec{P}\right) = P.AB\,cos\,45 = 1.10.10.\,cos135 = -70.71\,J$$

- Les frottements étant négligeables, la force de contact $\vec{R}$ est alors perpendiculaire au plan, donc au déplacement, et son travail est **nul**.

- $W\left(\vec{R}\right) = 0\,J.$

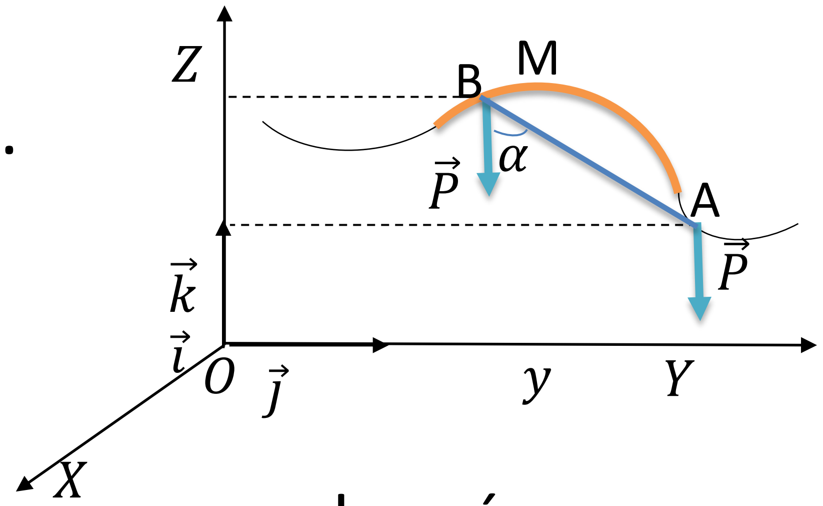
2~1 Travail d'une force constante sur un chemin quelconque

- Le corps se déplace de A vers B suivant 2 chemins différents : chemin rectiligne (1) et chemin curviligne quelconque (2). Il est soumis à la force constante $\vec{F}$
- Evaluons le travail de la force $\vec{F}$
- * suivant le chemin (1) : $W_1\overrightarrow{(F)} = \vec{F} \,.\, \overrightarrow{AB} = \vec{F}.\vec{l}$
- * suivant le chemin (2) : On subdivise le chemin en un très grand nombre n de très petits déplacements (déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl}_1, \overrightarrow{dl}_2, \ldots, \overrightarrow{dl}_n$), et on calcule pour chacun de ces déplacements le **travail élémentaire** :
- $dW_1 = \vec{F}.\overrightarrow{dl}_1$, $dW_2 = \vec{F}.\overrightarrow{dl}_2$, $dW_3 = \vec{F}.\overrightarrow{dl}_3$, …. $dW_n = \vec{F}.\overrightarrow{dl}_n$.

- Le travail W_2 de la force $\vec{F}$ sur le chemin curviligne de A vers B est égal à la somme de ces travaux élémentaires.
- $W_2(\overrightarrow{F}) = dW_1 + dW_2 + \cdots + dW_n$

  $= \vec{F}.\overrightarrow{dl}_1 + \vec{F}.\overrightarrow{dl}_2.....+\vec{F}.\overrightarrow{dl}_n$.
- $W_2(\overrightarrow{F}) = \vec{F}.(\overrightarrow{dl}_1 + \overrightarrow{dl}_2 + \overrightarrow{dl}_3 + ...+ \overrightarrow{dl}_n) = \vec{F}.\vec{l}.$
- On obtient cette même expression quelle que soit la trajectoire curviligne.
- **Conclusion**
- Le travail d'une force $\vec{F}$ constante est indépendant du chemin suivi entre le point de départ A et le point d'arrivée B : donc $\vec{F}$ est une force **conservative**.

- **Exemple : travail du poids d'un corps :**
- Corps transporté de point A au point B vers le haut.
- Considérons le repère d'axes (O x y z),



- $W\left(\vec{P}\right)_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dl} = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$ = P. AB. Cos α
- En utilisant l'expression du déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes :$\vec{P} = -mg\vec{k}$ alors :
- $\vec{P}.\overrightarrow{AB} = \left(0\vec{i} + 0\vec{j} - mg\vec{k}\right)\left((x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\right)$
- $\vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A)$
- On a $(z_B - z_A) = AB\ cos\ \alpha$ alors :
- $$\vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A) = -mg\ AB \cos\alpha$$

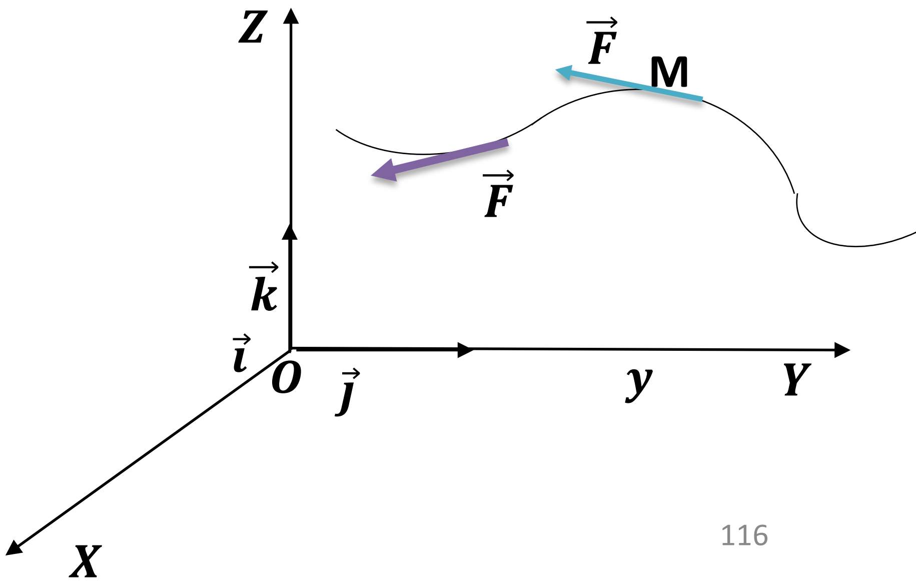
- $\vec{P}.\overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A) = -mg\ AB \cos\alpha$
- Dans ce cas le point M monte donc $(z_B - z_A) > 0$ donc $W\left(\vec{P}\right)_{A \to B} < 0\ (travail\ \boldsymbol{resistant})$
- Et si M descend donc $(z_B - z_A) < 0$ donc $W\left(\vec{P}\right)_{A \to B} > 0\ \ (travail\ \boldsymbol{moteur})$.
- Le poids est constant au cours du déplacement, donc son travail W($\vec{P}$) est indépendant du chemin suivi. On dit que le poids est une **force conservative.**

1.3. Travail d'une force variable sur un déplacement quelconque :

- Dans le cas où la force varie en intensité et/ou en direction lors du déplacement quelconque, il faut faire appel au calcul intégral.

$$A\xrightarrow{W(\vec{F})}B = \int_A^B \vec{F}(M).\overrightarrow{dl}$$

- **Utilisation des coordonnées cartésiennes** : soit :
- $\vec{F}(M) = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k}$ et $\vec{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$
- Donc : $\vec{F}.\vec{dl} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$
- nous obtenons
- $A\xrightarrow{W(\vec{F})}B = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} =$
- $= \int_{x_A}^{x_B} F_x.dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y.dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z.dz$



- **Exemple : le travail de la force élastique**
- Le travail nécessaire pour allonger un ressort (soit suspendu verticalement ou horizontalement) du point A au point B est :
- La tension d'un ressort est : $\vec{T} = -Kx\vec{\imath}$ ou K : est la raideur du ressort.
- Donc : $W\left(\vec{T}\right)_{A\to B} = \int_A^B \vec{T}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{T}.dx\,\vec{\imath} = \int_{x_A}^{x_B}(-Kx).dx$
- $W\left(\vec{T}\right)_{A\to B} = \frac{1}{2}Kx_A^2 - \frac{1}{2}Kx_B^2$
- On remarque aussi que le travail de la tension du ressort dépend uniquement de la position initiale A et la position finale B, donc la tension du ressort est une force conservative

- **2. Les forces conservatives ou dérivant d’un potentiel : القوى المحفوظة**
- On dit d’une force qu’elle est conservative ou dérivant d’un potentiel, si son travail est indépendant du chemin suivi, quel que soit le déplacement probable entre le point de départ et le point d’arrivée.
- Exemple : - le poids ,   - La tension du ressort.
- La force constante en module et en direction.
- **3. Les forces non-conservatives : القوى غير محفوظة**
- Une force est dite non-conservative, si son travail dépend du chemin suivi.
- Exemple : - forces de frottement, Quelque forces variables.

- **Exemple** : La force $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{\imath} + 3xy\vec{\jmath}$ peut aller du point A (0, 0) au point B(2,4) suivant chacun des deux chemins : y = 2x et y =x^2 .
- Cette force est-elle conservatrice ?
- Réponse : Suivant le premier chemin **y = 2x** :
- y = 2x → $\vec{F} = (-3x^2)\vec{\imath} + 6x^2\vec{\jmath}$
- et dy = 2dx → $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} \rightarrow \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + 2dx\vec{\jmath}$
- $W\left(\vec{F}\right)_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B(-3x^2\vec{\imath} + 6x^2\vec{\jmath}).(dx\,\vec{\imath} + 2dx\vec{\jmath})$

$$= \int_0^2(-3x^2)dx + 12x^2dx$$

- $W\left(\vec{F}\right)_{A\rightarrow B} = \int_0^2 9x^2dx = 3x^3\Big]_0^2 = 24\,J$

- Suivant le deuxième chemin **y =$\boldsymbol{x^2}$**:
- y = $x^2 \rightarrow \vec{F} = \left(x^2 - x^4\right)\vec{\imath} + 3x^3\vec{\jmath}$
- et dy = 2xdx $\rightarrow \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} \rightarrow \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + 2dx\vec{\jmath}$
- $W\left(\vec{F}\right)_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B ((x^2 - x^4)\vec{\imath} + 3x^3\vec{\jmath}).(dx\,\vec{\imath} + 2xdx\vec{\jmath})$

$$= \int_0^2 (x^2 - x^4)dx + 6x^4dx$$

- $W\left(\vec{F}\right)_{A\rightarrow B} = \int_0^2 (x^2 + 5x^4)dx \;= \left(\frac{x^3}{3} + x^5\right)\Big]_0^2 = 34.6\,J$
- Les deux travaux ne sont pas égaux, donc la force dans ce cas n’est pas conservative.

4. Puissance d'une force : الاستطاعة

- La puissance d'une force $\vec{F}$ est le rapport du travail de celle-ci au temps mis pour l'accomplir. Selon la durée considérée, cette puissance est dite moyenne ou instantanée. L'unité de la puissance, dans le système MKSA, est le Watt.
- **Puissance moyenne :** $P_{moy} = \Delta W / \Delta t$
- **Puissance instantanée :** $P(t) = dW/dt$
- On a : $$W_A^B(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} \rightarrow dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$
- Donc : $P(\mathrm{t}) = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dl}}{dt}$ Et $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$ $\rightarrow$ $\mathrm{P}(\mathrm{t}) = \vec{F}.\vec{v}$ [Watt],
- 1W=1J/s = 1N.m/s

5. Énergie cinétique : الطاقة الحركية

- L’expression $E_C = \frac{1}{2}mv^2$est appelée énergie cinétique du point matériel. cette énergie dépend de la vitesse donc liée a mouvement.

Théorème de l’énergie cinétique : « Le travail de la résultante des forces appliquée à un point matériel entre deux point est égal à la variation de l’énergie cinétique du point matériel » $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right)$

$$= \boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

- **Démonstration :**
- Calculons le travail de la résultante des forces $\vec{F}$ appliquée à un point matériel de masse m entre deux points A et B.
- $W_A^B = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$
- et d'après le PFD nous avons : $\vec{F} = m\vec{a} = m\ \frac{d\vec{v}}{dt}$
- D'où : $W_A^B = \int_A^B m\ \frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B m(d\vec{v}.\vec{v})$ Avec : $\frac{d\vec{l}}{dt} = \overrightarrow{v}$
- Le travail devient alors :
- $W_A^B = \int_A^B m(v.dv) = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C$

6. Energie potentielle : الطاقة الكامنة

- L'énergie potentielle est une fonction dépend de la position, c'est le travail fourni à la particule pour la déplacer de sa position initiale à sa position finale.
- Si la force $\vec{F}$ est une force dérivant d'un potentiel (ou conservative), alors :
- $\sum W\left(\vec{F}_C\right)_{A\rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$
- Energie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgh = -\,W\left(\vec{P}\right)_{A\rightarrow B}$
- Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 = -\,W\left(\vec{T}\right)_{A\rightarrow B}$

9. Energie mécanique :الطاقة الميكانيكية

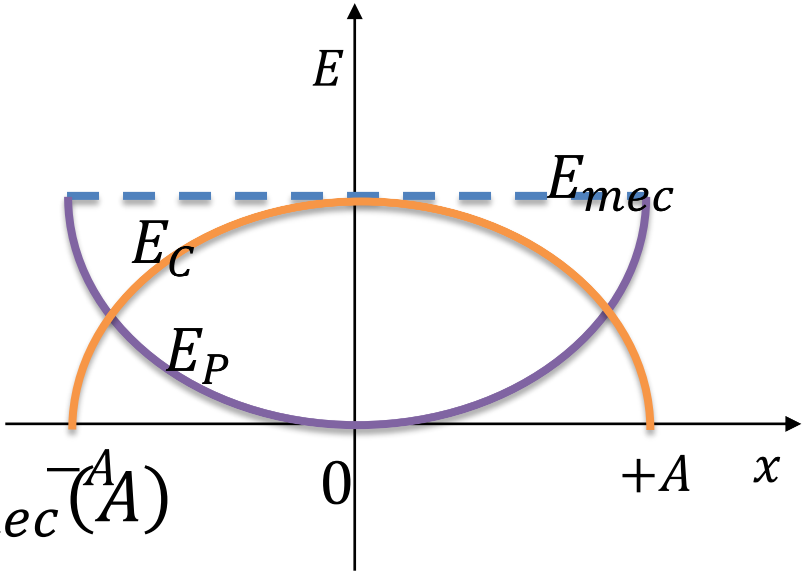
- L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.
- $E_{mec} = E_c + E_p$
- Théorème de l'énergie mécanique :
- $\Delta E_{mec} = E_{mec}(B) - E_{mec}(A) = \sum W_{A \to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$

- **Démonstration :**
- D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$ $= \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right)$
- Et $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right) + \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$
- $\sum W\left(\vec{F}_C\right)_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$
- Donc :
- $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$
- $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) = E_c(B) - E_c(A) + E_p(B) - E_p(A)$
- $\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_{mec}$

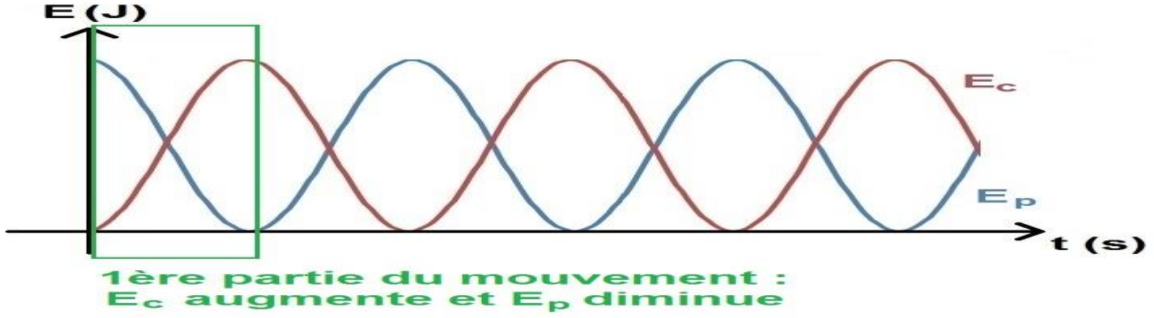
Principe de la conservation de l’énergie mécanique :

- Si le système est conservatif ou il ne soumis qu’a des forces conservatives ou isolé mécaniquement donc l’énergie mécanique est conservée.
- $E_c + E_p = E_{mec} = constante$
- Cela veut dire que la variation de l’énergie mécanique est nulle $\Delta E_{mec} = 0$.
- $E_{mec}(B) = E_{mec}(A)$
- Donc : $E_C(B) + E_P(B) = E_C(A) + E_p(A)$

- **Exemple des systèmes conservatifs : - Système d’une masse accroché à un ressort**
- $\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2} m x^2}$ et $\quad E_C = \frac{1}{2} m v^2$
- **Pendule simple**
- $E_C = \frac{1}{2} m v^2$, et $\quad \boldsymbol{E_p = mgh}$
- $E_c + E_p = E_{mec} = const \;\rightarrow \quad E_{mec}(B) = E_{mec}(A)$

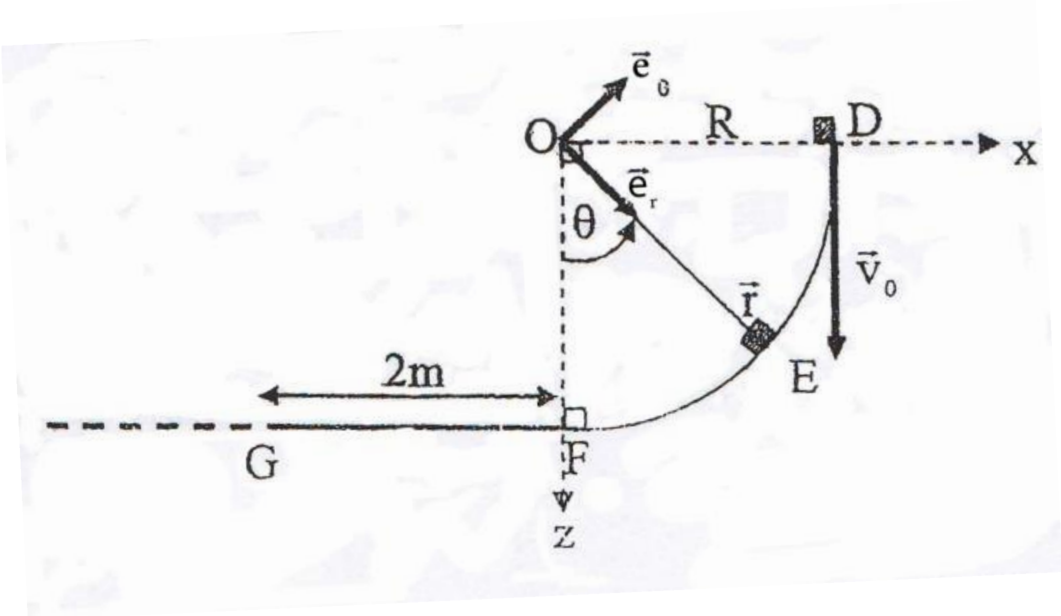


- Si le système n’est pas soumis à des frottements, l’énergie mécanique se conserve au cours du temps.



Exercice 3 : Un corps de masse m, assimilé à un point matériel, est lancé à partir du point D de la piste (DEF) avec une vitesse V_0 tangente à la piste. Cette dernière est formée d'un quart de cercle (DEF) de centre O et de rayon r =90 cm, contenu dans un plan vertical et d'une portion horizontale (FG) comme le montre la figure ci-dessous. Les frottements entre le corps et la partie (DEF) sont supposés négligeables.

1/Représenter les forces agissant sur le corps au point E.



2/Calculer le travail de la force de contact C agissant sur le corps entre les points D et E.

3/ Etablir l'expression du travail du poids P du corps, entre les points D et E en fonction de l'angle θ .En déduire l'expression de l'énergie potentielle Ep (ϴ) en fonction de ϴ, l'origine des énergies potentielles doit être précisée.

- 4/Etablir l'expression du vecteur vitesse V(θ) du corps en coordonnées polaires, en fonction de l'angle θ et des vecteurs unitaires er et eθ représentés sur la figure.
- 5/trouver l'expression de la force de contact $\vec{C}$ appliquée par la piste sur le corps au point E en fonction de θ.

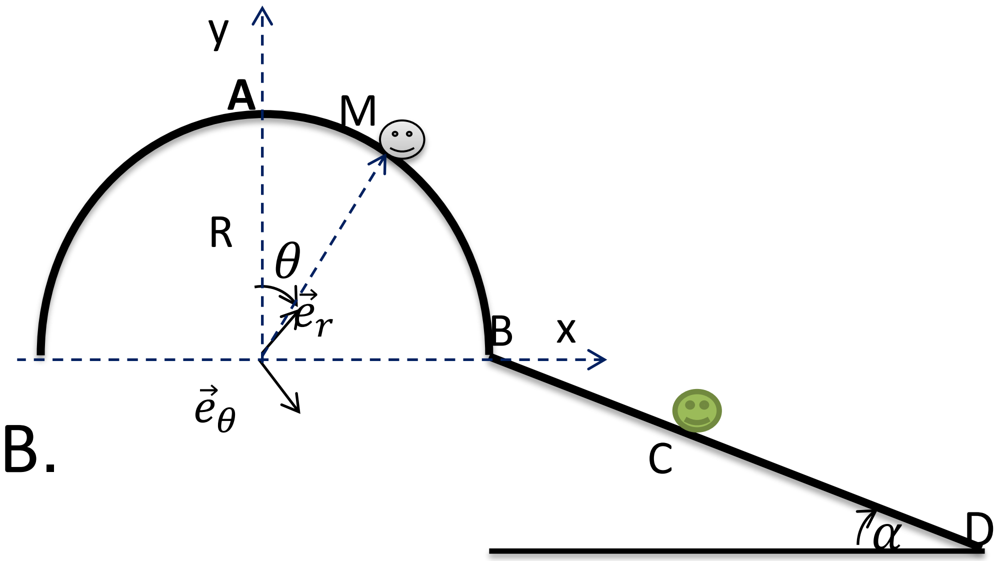
- 6/ Quel doit être le module de la vitesse $\vec{V}0$ pour que le corps soit soumis au point F (θ=0) à une force de contact de module $\left|\vec{C}\right| = 3\left|\vec{P}\right|$
- 7/ Au-delà du point F les frottements ne sont plus négligeables, le corps a une vitesse $\vec{V}0$ nulle au point D , il s'arrête au point G situé à 2m du point F (FG = 2m) voir figure .Calculer le coefficient de frottement entre la piste et le corps.
- 8/ On appelle $\vec{L}$ le moment cinétique du corps par rapport au point O. Etablir l'expression de $\vec{L}$ en fonction de l'angle θ au cours du mouvement du corps entre les Points D & F.

Exercice 4 : Un skieur que l'on assimilera à un point matériel M, de masse m=50 Kg est mobile sans vitesse initiale à partir du sommet **S** (القمة) sur une piste formée de deux parties : - la partie circulaire AB (igloo de l'esquimau de contre O et de rayon R constant, les frottements dans cette partie sont négligeables. (Voir figure). La partie BD rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal, de longueur 3R et de coefficient de frottement μ_c=0.

1) Représenter les forces agissant sur le corps au point M.

2) Déterminer l'expression de la vitesse de skieur au point M en fonction de R, θ et g.

3) Déduire la vitesse de skieur au point B.



- 4 Déterminer l’expression de la réaction $\overrightarrow{R_n}$ en fonction de θ pour laquelle le skieur quittera la piste au point M.
- 5 Le skieur touchera le plan incliné BD au point C avec V_C = V_M.
- - Représenter les forces agissant sur le corps au point C.
- - Exprimer la valeur de l’accélération du corps.
- - Déduire l’expression de la vitesse de skieur v(t).
- -Calculer la vitesse de skieur au point D (VD).
- -Quelle est la valeur minimale du coefficient de frottement μ'_c
- pour que le skieur s’arrête au point D.
- - Calculer le travail des forces agissant sur le corps dans le plan incliné.
- AN : R=4m ; g=10m/s2, $\alpha = 30°, CD = 10m$