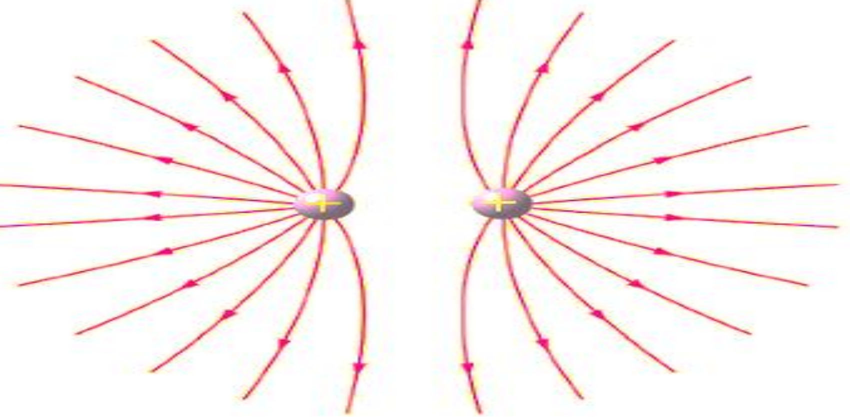


جامعة باتنة 2
الشهيد مصطفى بن بولعيد

UEF 212
Cours Physique 2

Eléctrosatique
الكهرباء الساكنة

Dr S. ZEROUALI

ÉLECTROSTATIQUE

- 1. Introduction et rappels mathématiques
- 2.Propriétés de la charge électrique خصائص الشحنة الكهربائية
- 3. Matériaux conducteurs, matériaux isolants

النواقل والعوازل
- 4. Distributions de charges توزيع الشحنات
- 4 Interactions coulombiennes (électrostatiques)
- 5. Le champ électrique الحقل الكهربائي
- 6. Potentiel électrostatique الكمون الكهربائي
- 7. Dipôle électrostatique ثنائي قطب

- 8. Théorème de Gauss
- 9. Exemples d’application:
  - a- Sphère chargée en volume
  - b- Sphère chargée en surface
  - c- Cylindre chargé en volume
  - d- Cylindre chargé en surface

1 Rappel mathématique:

Les operateurs différentiels:

L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaires et de vecteurs.

Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre.

L'opérateur nabla est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Notion sur le gradient

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ de scalaire et décrit un champ de vecteur qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace
En coordonnées cartésiennes le gradient est donné par :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Exemple :

Considérons la fonction : $f(x,y,z) = 3x^2y^3z$

Calculer le gradient de cette fonction.

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial f(3x^2y^3z)}{\partial x} = 6xy^3z, \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial y} = 9x^2y^2z, \frac{\partial(3x^2y^3z)}{\partial z} = 3x^2y^3$$

$$\overrightarrow{grad}f = 6xy^3z\vec{i} + 9x^2y^2z\vec{j} + 3x^2y^3\vec{k}$$

La divergence:

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ ***vectoriel*** $\vec{V}$ (défini par ses trois composantes) donne la divergence de ce champ vectoriel.

La divergence obtenue est un champ s***calaire.***

$$div\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{V} = \langle V_x , V_y , V_z \rangle$$

Exemple :

Calculer la divergence du vecteur :
$\vec{V} = 2xy\vec{\imath} - 3yz^2\vec{\jmath} + 9xy^3\vec{k}$

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial 2xy}{\partial x} - \frac{\partial 3yz^2}{\partial y} + \frac{\partial 9xy^3}{\partial z}$$

$$div\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0$$

Le rotationnel: transforme un champ de ***vecteurs*** en un autre champ de ***vecteurs***. Plus difficile à se représenter aussi précisément que le gradient et la divergence, il exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point. En coordonnées cartésiennes, on peut définir le rotationnel par la relation

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Exemple:

Soit $\vec{V}$ (x,y,z)=2xy$\vec{\imath} - 3yz^2\vec{\jmath}$+$9xy^3\vec{k}$

Est un champ de vecteur.

Calculer le $\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 3yz^2 & 9xy^3 \end{vmatrix}$$

$=(27\,xy^2 - 6yz)\,\vec{\imath} - 9y^3\vec{\jmath} - 2x\vec{k}$

ELECTROSTATIQUE

1/ Définition :

L'électrostatique est l'étude des phénomènes produits par des charges électriques à l'état de repos.

Ou bien l'étude des interactions électriques des particules chargées immobiles.

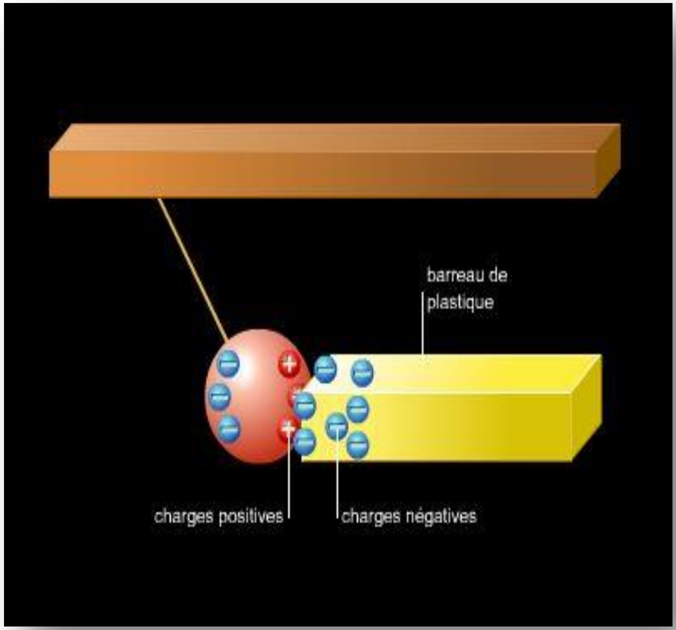
2/ Phénomènes d'électrisation

Tous les corps s'électrisent, on dispose de plusieurs moyens pour le faire: - par frottement; -
par contact avec un corps déjà électrisé ;
en reliant le corps à une borne d'un générateur électriques.

Notions de charges électriques

La matière est constituée de particules élémentaires (atome, proton et neutron), caractérisées par leur masse et leurs charges.

1/ Prenons une boule très légère en polystyrène par exemple, recouverte de métal fin.



Approchons ensuite une tige de verre ou d'ambre préalablement frotté avec un tissu, on observe une attraction entre le verre et la boule et une répulsion entre l'ambre et la boule : on fait ainsi apparaitre deux types d'électricité, charges positives et charges négatives.

2/ Prenons maintenant deux boules en polystyrène électrisée l’une par du verre frotté et l’autre par de l’ambre frotté on voit que les deux boules s’attirent, ensuite les deux boules sont électrisées par du verre frotté, on remarque que les deux boules se repoussent.

Les charges de mêmes signes se repoussent

et les charges de signes opposés s’attirent.

1- Notion de charge électrique et la matière :

La matière est l’ensemble de particules élémentaires, elle se compose d’atomes et de molécules : un atome est constitué d’un noyau (proton et neutron) autour duquel gravite un nuage forme d’électrons.

1- Force électrostatique

- Les électrons et les protons portent la même charge électrique en valeur absolue noté $|e|$. Cette charge est appelée charge élémentaire ; c'est la plus petite charge électrique dans la nature $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$.
- D'après Millican (1907) ; toute charges électriques est une multiple d'une charge élémentaire e :

Q = $\pm$ne Coulomb ; n : est nombre naturel entier

2/ Loi de Coulomb dans le vide :

- Soient deux charge ponctuelles q_1 et q_2 de masses m_1 et m_2 séparées par une distance r.
- Les deux charges s'attirent ou se repoussent mutuellement avec une force $\overrightarrow{F_e}$:

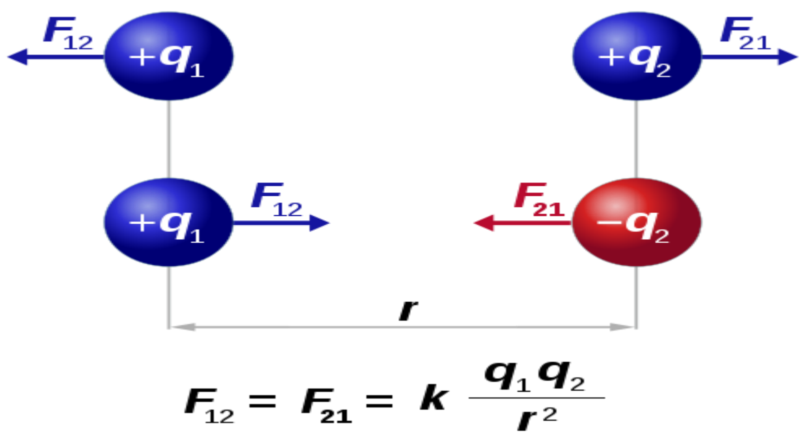
$$\overrightarrow{F_e} = \vec{F}_{q_1 q_2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

avec : $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ est la constante du coulomb.

Et ε_0 est la permittivité du vide.

- $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ [$C^2\,m^{-2}N^{-}$]

  et $K = 9 \cdot 10^9$ [$C^{-2}\,m^2N$]
- $\vec{u}$: Vecteur unitaire.
- La loi de coulomb peut s'écrire aussi :
- $\vec{F}_{q_1q_2} = K\,\dfrac{q_1q_2}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} = K\;q_1q_2\,\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$



- D’après le principe d’action-réaction, la force qu’exerce q_1 sur q_2 est égale et opposé :

$$\vec{F}_{q_1 q_2} = -\vec{F}_{q_2 q_1}$$

- Cette loi est attractive si les charges sont de signe opposés $(q_1 q_2 < 0)$ et répulsive si les charges de même signe $(q_1 q_2 > 0)$.

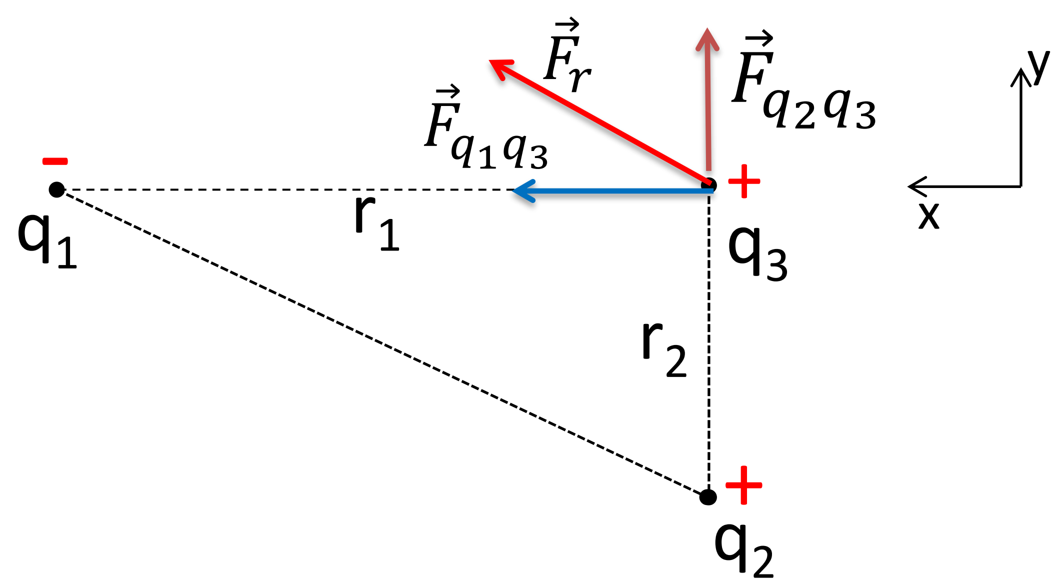
3/ cas d'une distribution discrète (Principe de superposition des forces):

Dans le cas général, si on a **n** charges électriques dans le vide, le principe de superposition permet de faire la somme vectorielle des forces électrostatique crées par les charges q_i et agissantes sur la charge q_m.

$$\vec{F}_r(m) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{q_i/q_m}$$

Exemple :

- A partir de la figure suivante, calculer l'intensité de la résultante des forces agissante sur la charge q_3.
- Avec : q_1 = -1,5 mC ; q_2 = 0,5 mC ; q_3 = 0,2 mC.



Réponse :

$q_1 q_3 < 0 \rightarrow \vec{F}_{q_1 q_3}$ est une force d'attraction.

$q_2 q_3 > 0 \rightarrow \vec{F}_{q_2 q_3}$ est une force de répulsion.

D'où: $\vec{F}_{q_1 q_3} = K \frac{q_1 q_3}{r_1^2} \vec{u} \rightarrow \left|\vec{F}_{q_1 q_3}\right| = K \frac{|q_1||q_3|}{r_1^2}$

$= 9.10^9 \frac{|-1{,}5.10^{-3}||0{,}2.10^{-3}|}{1{,}2^2} = 1{,}88.10^3 N$

$$\vec{F}_{q_2 q_3} = K \frac{q_2 q_3}{r_2^2} \vec{u} \rightarrow \left|\vec{F}_{q_2 q_3}\right| = K \frac{|q_2||q_3|}{r_2^2}$$

$= 9.10^9 \frac{|0{,}5.10^{-3}||0{,}2.10^{-3}|}{0{,}5^2} = 3{,}6.10^3\ N$

Donc : $\vec{F}_r = \vec{F}_{q_1q_3} + \vec{F}_{q_2q_3}$

Ou bien : $\vec{F}_r = \vec{F}_x + \vec{F}_y = \vec{F}_{q_1q_3} + \vec{F}_{q_2q_3}$

$$= K\,\frac{|q_1||q_3|}{r_1^2}\,\vec{\imath} + K\,\frac{|q_2||q_3|}{r_2^2}\,\vec{\jmath}$$

$$\rightarrow |\vec{F}_r| = \sqrt{\left(\vec{F}_x\right)^2 + \left(\vec{F}_y\right)^2}$$

$$= \sqrt{(1{,}88.\,10^3)^2 + (3{,}6.\,10^3)^2} = 4{,}06.\,10^3\,N$$

L'angle α que forme $\vec{F}_r$ avec l'axe X est : $tan\ \alpha = \frac{|\vec{F}_{q_1q_3}|}{|\vec{F}_r|} = 1{,}92$

$$\rightarrow \alpha = 62{,}5°$$

II.2/ Champ Electrostatique :

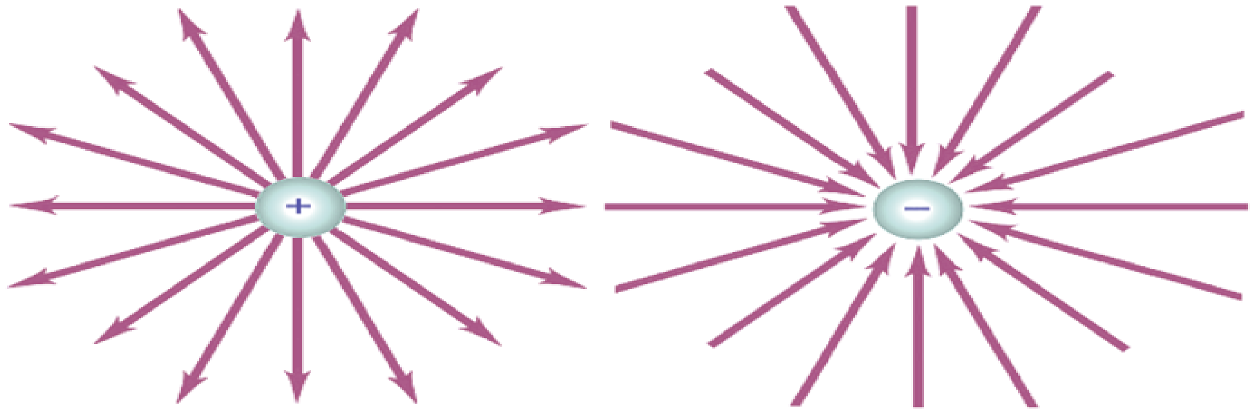
Lorsqu'une charge électrique se trouve au point O, elle crée alors, en tout pont M de l'espace qui l'entoure un champ vectoriel appelé champ électrostatique exprimer par :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = K\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}$$

Ce champ est radial

- Sa direction passe par la charge
- Dirigé vers l'extérieur si q > 0
- Dirigé vers l'intérieur si q < 0
- Son intensité :

$$\left|\vec{E}(\mathrm{M})\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

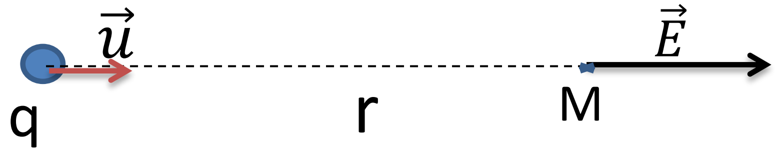


- Relation entre champ et force électrostatique :

La force électrostatique s'exerçant sur une charge cible q placée au point M est :

$$\vec{F} = q.\vec{E} \qquad (N)$$

donc le champ électrostatique $\vec{E}$ est le rapport entre la force électrostatique $\vec{F}$ est la charge q soumise a cette force ;

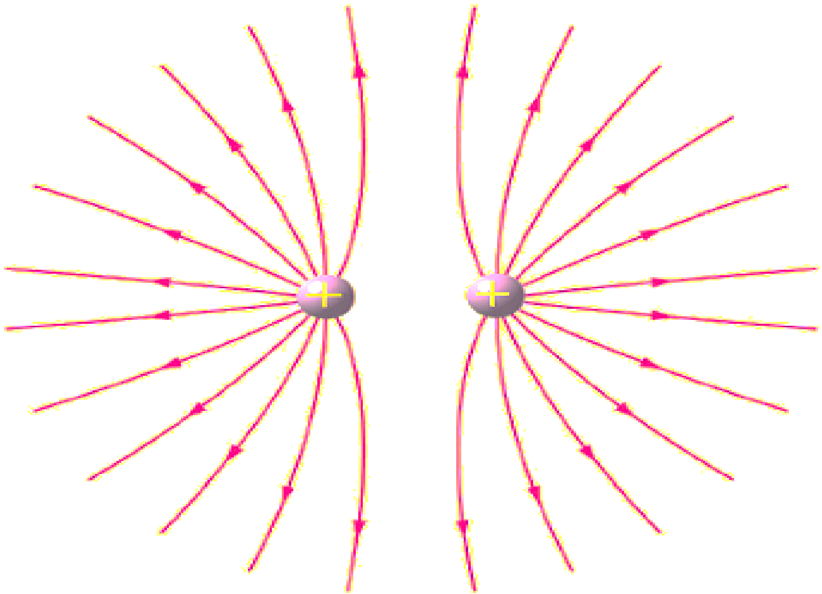


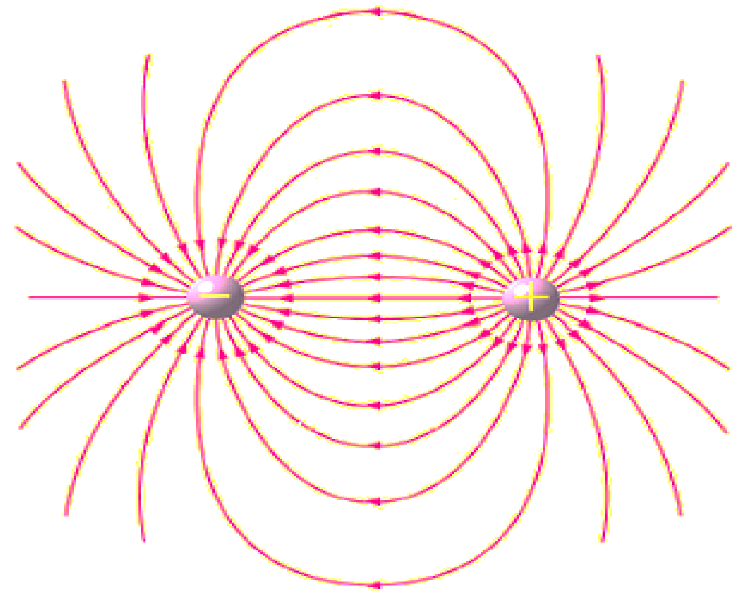
B- Champ électrostatique crée par un ensemble de charge :

- Cas d'une distribution discrète de charge « principe de superposition » : considérons n charges électriques ponctuelles q_i fixes placées p_i dans le vide. Le champ électrostatique crée par l'ensemble de ces charges en un point M s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i(M)$$

Les lignes du champ :





Les lignes de champ de deux charges de même signe.

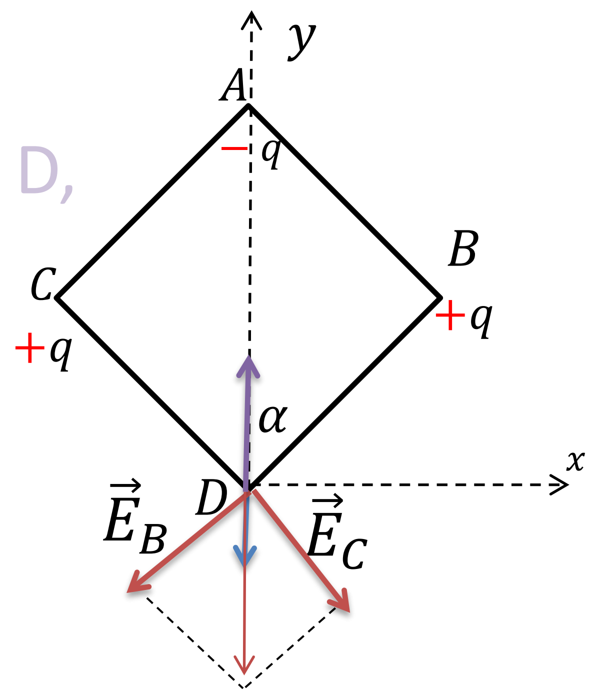
b- Les lignes de champ de deux charges de signes opposés.

Exemple :

D'après la figure suivante :

Calculer le champ $\vec{E}(D)$? et représenter graphiquement ce champ.

On remplace une charge +2q au point D,



Solution :

$$\vec{E}_T(D) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}_T(D) = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

$$\begin{cases} E_x = E_C \, sin\alpha - E_B \, sin\alpha & (1) \\ \\ E_y = E_A - E_B \, cos\alpha - E_C \, cos \, \alpha & (2) \end{cases}$$

- $E_C = E_B = \frac{k|+q|}{a^2} = \frac{kq}{a^2}$; $\quad E_A = \frac{k|-q|}{r^2} = \frac{kq}{2a^2}$

- $\rightarrow \begin{cases} E_x = \left(\frac{kq}{a^2} - \frac{kq}{a^2}\right) sin\alpha = 0 \\ E_y = \frac{kq}{2a^2} - \frac{2kq}{a^2} cos\ \alpha \end{cases}$

avec : $cos\ \alpha = 45°$ et $r^2 = 2a^2$

$\rightarrow E_y = \frac{kq}{a^2}(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(D) = \frac{kq}{2a^2}(1 - 2\sqrt{2})\,\vec{j}}$

- La force $\vec{F}(D)$ appliquée a la charge (+2q) au point D :

$$\vec{F}(D) = q\,\vec{E}(D) = +2q\vec{E}(D)$$

- $\vec{F}(D) = 2q\left(\frac{kq}{2a^2}\left(1 - 2\sqrt{2}\right)\right)\vec{j}$

$$= \left(\boldsymbol{\frac{kq^2}{a^2}\left(1 - 2\sqrt{2}\right)}\right)\boldsymbol{\vec{j}}$$

3. Potentiel électrostatique :
الكمون الكهروستاتيكي

- La différence de potentiel entre deux points A et B ($V_{AB} = (V_A - V_B)$ est le travail nécessaire pour déplacer la charge **q** du point A au point B.

- $W(A \to B) = W_{A\to B}\ (\vec{F}) = qV_{AB} = q(V_A - V_B)$

$$= -q(V_B - V_A) = -q\int_A^B dV \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

- Et on a aussi la force $\vec{F} = q\vec{E}$

Et le travail de $\vec{F}$:

$$W_{A\to B}\overrightarrow{(F)} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B q\vec{E}.\overrightarrow{dr} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

$$(1) = (2) \to -q\int_A^B dV = \int_A^B q\vec{E}.\overrightarrow{dr}$$

- $\Rightarrow -\int_A^B dV = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr}$
- $\to \boldsymbol{dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dr}}$ et $E = -\frac{dV}{dr}$ puisque $\vec{E}//\overrightarrow{dr}$.
- *V* est une grandeur scalaire, en dit dans ce cas que le champ est dérive du potentiel V.

- Dans le cas générale (dans le repère (o;x;y;z)

$$E_x = -\frac{dV}{dx};\ E_y = -\frac{dV}{dy}; E_z = -\frac{dV}{dz}$$

- Et le champ total : $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = E_x\,\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}$

Donc : $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\left(\frac{dV}{dx}\vec{\imath} + \frac{dV}{dy}\vec{\jmath} + \frac{dV}{dz}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,V$

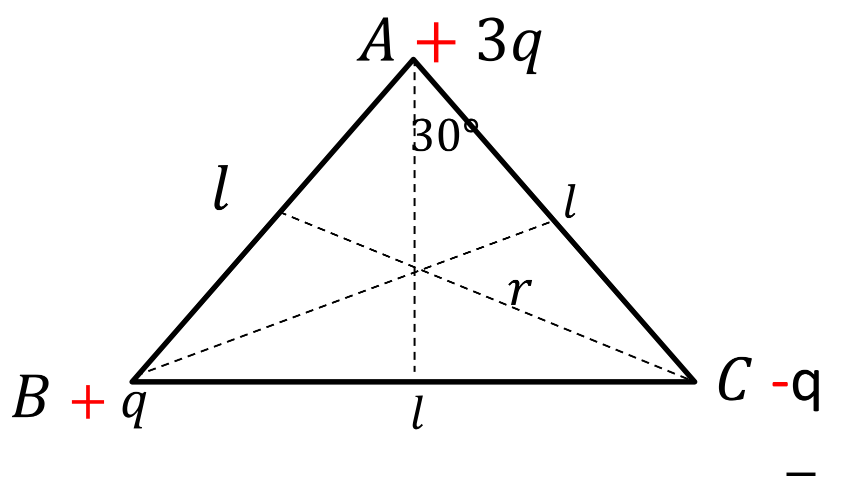
- $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,V$

a : Potentiel électrique crée par une charge ponctuelle q:

- on a vu que le champ $\vec{E}$ est radial : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}$
- et pour obtenir le potentiel V : dV= - $\vec{E}.\overrightarrow{dr}$
- et puisque $\vec{E}//\overrightarrow{dr}$; donc : dV= $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ dr$
- $\Rightarrow V = \int dV = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ dr = \boldsymbol{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C}$
- $\Rightarrow \boldsymbol{V = K\frac{q}{r} + C}$
- En suppose que si r → ∞, le potentiel V= 0 on aura C = 0
- $\Rightarrow \boldsymbol{V = K\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} \quad [\boldsymbol{Volt}]$

- Le potentiel s’exprime en volt.
- Le potentiel est constant sur des sphères de rayon r_i ; dont leur centre est la charge q. on dit que ces sphères constituent des surfaces équipotentielles (سطوح تساوي الكمون)
- b- Potentiel électrostatique crée par un ensemble de charges :
- Les potentiels s’ajoutent pour une distribution de charges ponctuelles, on applique alors le theoreme de superposition :
- $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$

- Exemple :
- Soit un ensemble de trois charges ponctuelles +3q , +q et –q disposées respectivement aux sommet A, B et C d'un triangle ABC de côté *a* = 0,6 m.
- Calculer le potentiel résultant V au point G centre de gravité du triangle ABC ; q= 3.10^{-7} C.



- Solution :
- On a : $V_G = V_A + V_B + V_C$
- $V_G = \frac{Kq_A}{AG} + \frac{Kq_B}{BG} + \frac{Kq_C}{CG}$ avec AG = BG = CG = r
- et $cos30 = \frac{l/_2}{r} \Rightarrow r = \frac{l/2}{\sqrt{3}/_2} = \frac{l}{\sqrt{3}}$
- $V_G = \frac{K}{r}(q_A + q_B + q_C) = \frac{K}{r}(+3q + q - q)$
- $\Rightarrow V_G = \frac{K}{\frac{l}{\sqrt{3}}}(+3q) = \frac{3\sqrt{3}Kq}{l}$
- AN: $V_G = \frac{3\sqrt{3}.9.10^9.3.10^{-7}}{0,6} = 23,4.10^3\ [V]$

III. Champ et potentiel électrostatiques dans le cas d'une distribution continue de charges :

- **III.1. Champ électrostatique crée par une distribution continue :**
- Dans le cas de très grand nombre de charges; celle-ci peut être reparties uniformément suivant une droite; une surface plane ou dans un volume.

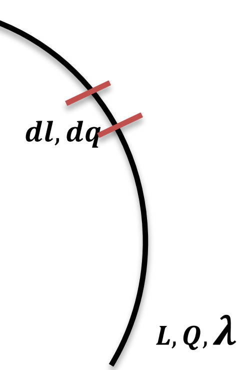
- Et pour calculer le champ en un point M de l’espace, on devise cette répartition en un nombre infini (petits morceaux) contenant chacun une charge élémentaire dq distant de r du point M et la somme de ces champs élémentaires sera remplacer par une intégrale.
- $\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} d\vec{E}_i(M) = \int d\vec{E}(M) = \int \frac{Kdq}{r^2}\vec{u}$

1.1/ On distingue trois types de distribution continue de charges :

- Une distribution linéaire ou linéique de charge
- Une distribution surfacique de charge
- Une distribution volumique de charge

a/ Distribution linéique de charge :

- le champ électrostatique produit par un fil de longueur L portant une charge totale Q uniformément repartie sur sa longueur de densité linéique λ (C/m).



- Soit un élément de longueur $\boldsymbol{dl}$ qui porte une charge élémentaire $\boldsymbol{dq}$. on a : $\lambda = \frac{dq}{dl}$ alors : $\boldsymbol{dq = \lambda\, dl}$.

- On peut écrire que la charge totale portée par le fil est :
- $Q = \int dq = \int \lambda . dl$
- Et que : $\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M) = \int \frac{Kdq}{r^2} \vec{u}$

  $= \int \frac{K.\lambda.dl}{r^2} \vec{u}$

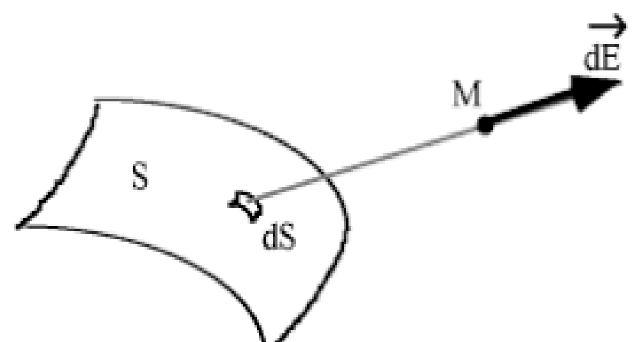
b/ Distribution surfacique de charge :

- soit une surface S portant une charge Q uniformément repartie sur toute sa surface avec une densité surfacique σ (C/m^2).
- Soit un élément de surface qui porte une charge élémentaire dq ou $dq = \sigma.ds$, on peut écrire :

$$Q = \int dq = \iint \sigma.ds \quad \text{et } \vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)\ ;$$

donc :

$$\vec{E}(M) = \int \frac{Kdq}{r^2}\vec{u} = \iint \frac{K.\sigma.ds}{r^2}\vec{u}$$



c/ Distribution volumique de charge :

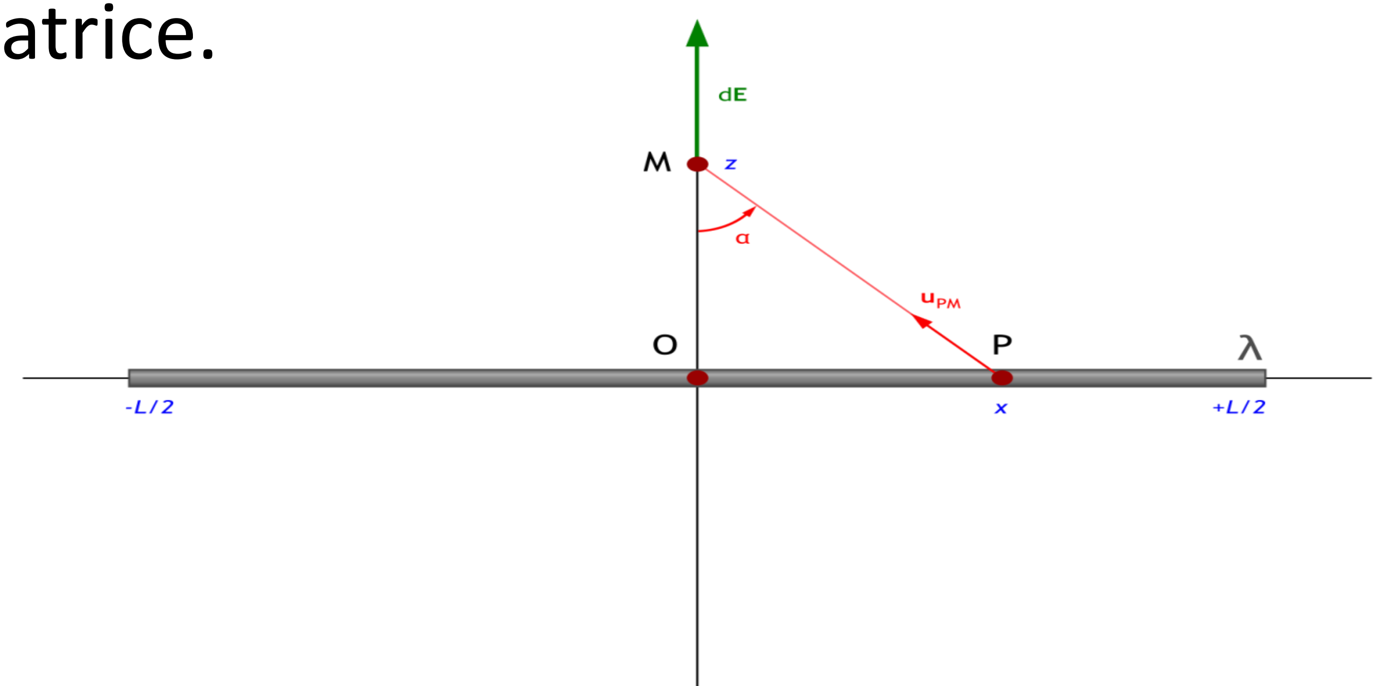
- De la même manière, on peut considérer une distribution volumique de charge.
- Soit un volume V portant une Q uniformément repartie sur tout le volume avec une densité volumique $\rho\ (C/m^3)$. Soit dv un élément de volume qui porte une charge élémentaire dq ou $dq = \rho.dv$, on peut écrire : $Q = \int dq = \iiint \rho.dv$ et $\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)$,
- donc : $\vec{E}(M) = \int \frac{Kdq}{r^2}\vec{u} = \iiint \frac{K.\rho.dv}{r^2}\vec{u}$

Dans un système d'axes cartésiens (o, x, y, z) ; on a :

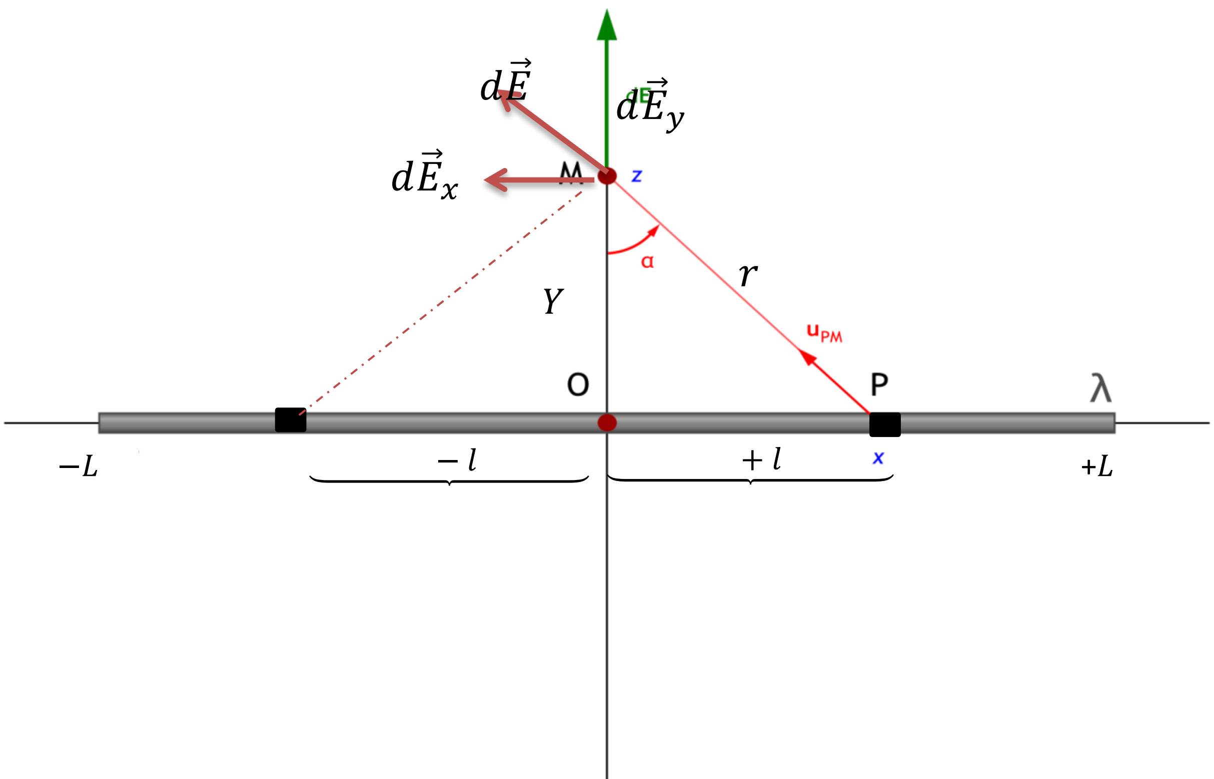
- $d\vec{E} = dE_x\vec{\imath} + dE_y\vec{\jmath} + dE_z\vec{k}$
- $E_x = \int dE_x\,;\; E_y = \int dE_y\,;\; E_z = \int dE_z$
- En tous les cas, la relation qu'il faut retenir est :
- $\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)$
- Sashant que : $d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$
- Et $\vec{E}(M) = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}$

III.1.2. Applications :

- III.1.2.1/ le champ électrostatique produit par un fil de longueur 2**L** et portant une densité linéique de densité **λ** positive et uniforme.
- Déterminons le champ crée par dette distribution en un point **M** sur une distance y sur sa médiatrice.



- <u>Solution</u>
- Le petit élément que l'on doit prendre en considération est un segment rectiligne de longueur ***dl=dx*** et portant la charge élémentaire ***dq.***
- La distribution est linéaire $\Rightarrow dq = \lambda \, dl \;\Rightarrow$



- Le champ élémentaire $\boldsymbol{d\vec{E}}$ produit par la charge élémentaire **dq** au point situe sur l'axe oy est :
- $d\vec{E}(M) = \frac{Kdq}{r^2} = \frac{K\,\lambda\,dl}{r^2}\vec{u} = \frac{K\,\lambda\,dx}{r^2}\vec{u}$
- *Avec : PM = r et OM = Y= constant*
- Sachant que le vecteur $d\vec{E}$ s'écrit dans le plans (o x y) par: $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$
- Et : $\begin{cases} E_x = \int dE_x = \int dE\ sin\alpha \\ E_y = \int dE_y = \int dE\ cos\alpha \end{cases}$
- Par raison de symétrie le champ électrostatique est nul selon **ox** : $\vec{E}_x(M) = \vec{0}$

- Il ne reste que la composante du champ selon **oy :** $\vec{E}\quad(M) = \vec{E}_y$
- $d\vec{E}_y(M) = 2d\vec{E}_y = 2dE\ cos\alpha\ \vec{j}$
- $\vec{E}(M) = 2\int_0^L dE\cos\alpha\ \vec{j}$ et

$dE(M) = \frac{K\ \lambda\ dl}{r^2}$

-
- $\vec{E}(M) = 2\int_0^L \frac{K\ \lambda\ dl}{r^2}\cos\alpha\ \vec{j}$
- *On remarque que : l , α et r sont des variables tandis que Y= OM est constant.*

- On en déduit géométriquement que :
- $\cos\alpha = \frac{Y}{r}$; d'où $r = \frac{Y}{cos\alpha} \Rightarrow\ r^2 = \frac{Y^2}{(cos\alpha)^2}$
- On a aussi : $tan\ \alpha = \frac{l}{Y} \Rightarrow l = Y\ tan\alpha$ et $dl = \frac{Y}{cos^2\alpha}\ d\alpha$

- On obtient finalement :
- $\vec{E}(M) = 2k\lambda \int_0^{\alpha_{max}} \frac{Y}{\frac{Y^2}{(cos\alpha)^2}.cos^2\alpha}\ \cos\alpha\ d\alpha\ \vec{j}$
- $$\vec{E}(M) = \frac{2k\lambda}{Y}\int_0^{\alpha_{max}} \cos\alpha\ d\alpha\ \vec{j}$$
- $\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{2k\lambda}{Y}\ sin\alpha_{max}\ \vec{j} = \frac{2k\lambda}{Y}\ sin\alpha_{max}\ \vec{j}$

- Avec : $sin\alpha_{max} = \frac{L}{r} = \frac{L}{\sqrt{L^2+Y^2}}$
- $\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{2k\lambda}}{\boldsymbol{Y}} \frac{\boldsymbol{L}}{\sqrt{\boldsymbol{L}^2+\boldsymbol{Y}^2}} \vec{\boldsymbol{J}}$
- Cas particulier :si le fil est infini : L$\rightarrow \infty$ alors $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$
- $\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{2k\lambda}}{\boldsymbol{Y}} \vec{\boldsymbol{J}}$

- **III.1.2.2/ le champ électrostatique produit par un fil circulaire de centre O et de rayon R chargé avec une densité linéique de densité λ positive et uniforme.**

- Déterminons le champ crée par cette distribution en un point M situé sur son axe de révolution z tel que OM = Z.

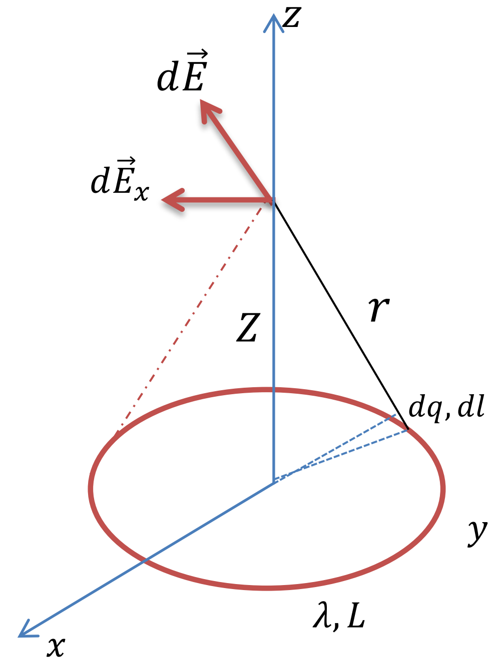
- **Solution :**
- Distribution est linéaire; charge elementaire

$dq = \lambda\, dl \Rightarrow\ Q = \int \lambda\, dl = \lambda\, L$ (charge totale).

- Le champ totale crée au point M est :
- $\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)$
- Le champ élémentaire crée

par la charge élémentaire :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y + d\vec{E}_z$$



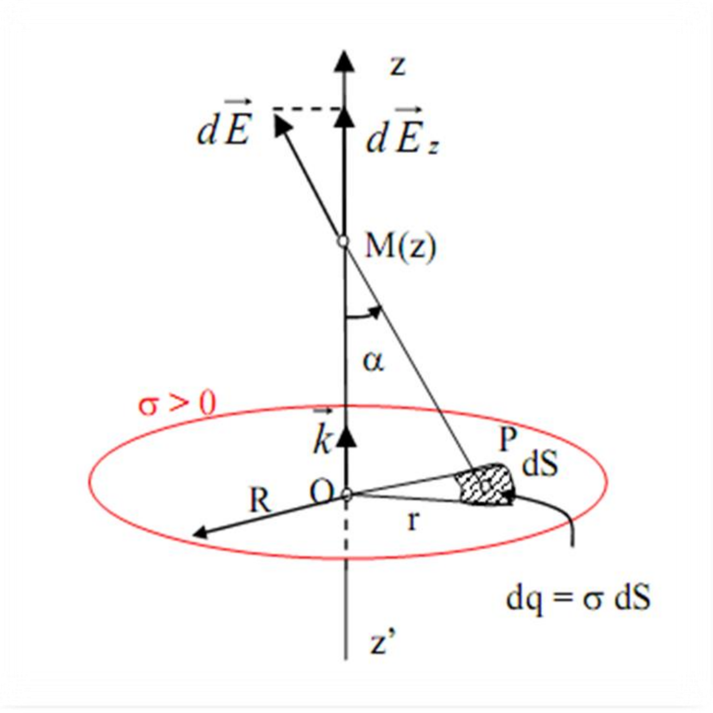
- Pour des raisons de symétrie, le champ $E_x = 0$; $E_y = 0$.
- Il ne reste que la composante suivant oz : $d\vec{E}(M) = d\vec{E}_z$
- Et $dE_z = dE\ cos\alpha$
- $\Rightarrow\ \vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M) = \int dE\ cos\,\alpha\,\vec{k}$ et : $dE = \frac{K\,dq}{r^2}$
- $\Rightarrow\ \vec{E}(M) = \int \frac{K\,dq}{r^2}\ cos\,\alpha\,\vec{k} = \int \frac{K\,\lambda\,dl}{r^2}\ cos\,\alpha\,\vec{k}$
- Avec : $r = \sqrt{Z^2 + R^2};\ cos\alpha = \frac{OM}{r} = \frac{Z}{r} = \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}$

- $\Rightarrow \vec{E}(M) = \int \frac{K\,\lambda\,dl}{Z^2+R^2} \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\ \vec{k}$ $\quad ; dl = R\,d\theta$
- $\Rightarrow \vec{E}(M) = \lambda Z K \int_0^{2\pi} \frac{R\,d\theta}{\sqrt[3]{Z^2+R^2}}\ \vec{k}$
- $\Rightarrow$
  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda\,Z\,R\,K}{\sqrt[3]{Z^2+R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta\ \vec{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\,Z\,R}{\sqrt[3]{Z^2+R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta\ \vec{k}$
- $\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\,Z\,R\,2\pi}{\sqrt[3]{Z^2+R^2}}\ \vec{k}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{\lambda\,Z\,R}{2\varepsilon_0 \sqrt[3]{Z^2+R^2}}\ \vec{k}}$$

III.1.2.3/ le champ électrostatique produit par un disque de centre O et de rayon R chargé avec une densité surfacique de densité σ positive et uniforme.
Déterminons le champ crée par dette distribution en un point M situé sur son axe de révolution z tel que OM = Z.

- **Solution :**
- Soit M un point de l'axe oz tel que : OM = Z.
- Un élément de surface **ds (**centré en P) porte une charge **dq = $\boldsymbol{\sigma}$ ds** crée en M un champ élémentaire :
- $dE = K\dfrac{dq}{PM^2} = K\dfrac{dq}{b^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma\, ds}{b^2}$
- Sachant que : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y + d\vec{E}_z$



Pour obtenir le champ produit par tout le disque chargé, on intègre de 0 à R.

$$E_z = \int dE_z = \int dE\, cos\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int dE sin\theta$$

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ porte sur l'axe zz'.

$$\vec{E}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}_z$$

Le champ crée une couronne circulaire élémentaire ds de rayon r d'épaisseur dr et de rayon r :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_z = \int d\vec{E}_z(M) = \int dE\, cos\, \alpha\, \vec{k}$$

$$= \int K \frac{dq}{b^2}\, cos\, \alpha\, \vec{k} = \int K \frac{\sigma\, ds}{b^2}\, cos\, \alpha\, \vec{k}$$

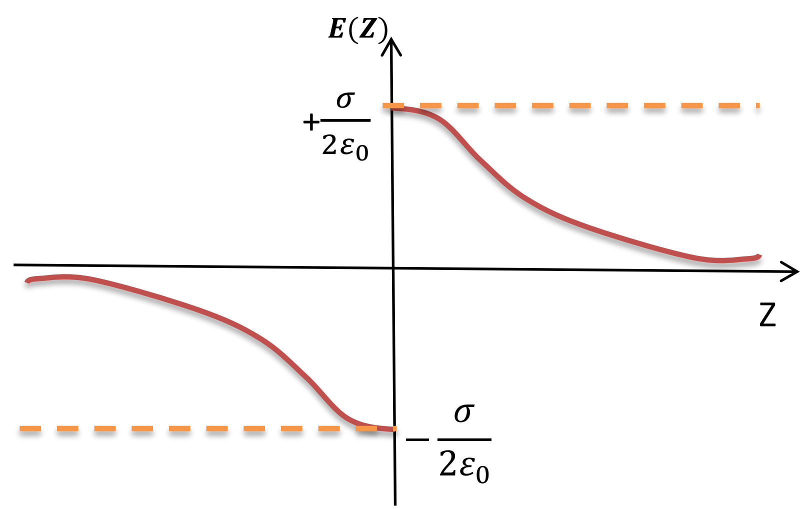
- A partir de la figure, on a géométriquement :

- $S = \pi r^2 \rightarrow dS = 2\pi\ r\ dr$ Et $\quad b^2 = Z^2 + r^2 \qquad et \qquad cos\alpha = \frac{Z}{b}$
  $= \frac{Z}{\sqrt{Z^2+r^2}}$
- Donc :
- $\vec{E}(M) = K\sigma \int_0^R \frac{2\pi\ rdr}{Z^2+r^2} \frac{Z}{\sqrt{Z^2+r^2}} \vec{k} \ = K\sigma\pi Z \int_0^R \frac{2\ rdr}{(Z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\ \vec{k}$
- Sous forme de : $\int u\,.\,u^{-n} = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
- $\Rightarrow \vec{E}(Z) = \ K\sigma\pi Z \left[\frac{(Z^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R \vec{k} = \frac{\sigma\pi Z}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2}{\sqrt{Z^2+r^2}}\right]_0^R \vec{k}$
-
- $= \frac{\sigma Z}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{Z^2+R^2}} + \frac{1}{|Z|}\right]\vec{k}$

$$\boldsymbol{\vec{E}(Z) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right]\vec{k}}$$

Graphe de $\vec{E}(Z)$:

- si Z=0, $E(M) = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- Z=∞, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{|Z|\sqrt{1+\frac{R^2}{Z^2}}}\right] = 0$
-
- Si $R \rightarrow \infty$, $E(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|}\right] = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
- C’est le cas d’un plan infini.



III.1.3/ Potentiel électrostatique crée par une distribution continue de charges :

- Dans ce cas, on doit procéder à une intégration après avoir choisi une charge élémentaire correspondante avec le même procédé que celui du champ électrique.
- $V = \int dV = \int \frac{Kdq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$
- **Exemple :**
- Un fil circulaire de longueur L, de centre O et de rayon R chargé avec une densité linéique de densité λ positive et uniforme.
- Déterminer le potentiel crée par cette distribution en un point M de l’axe oz et situé à la distance Y de O.
- En déduire le vecteur champ au point M.

- **Réponse :**
- Pour le point donné M, les grandeurs : R, Z et r sont constantes.
- La charge élémentaire $dq = \lambda\, dl$ va crée un potentiel élémentaire au point M :
- $dV = \frac{Kdq}{r}$
- $V = \int dV = \int \frac{Kdq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$
- On a : $r = \sqrt{R^2 + Z^2} = cste$
- Et la charge totale $Q = \int dq = \int_0^{2\pi R} \lambda\, dl = \lambda\, 2\pi R$
- Donc :
- $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{R^2+Z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, 2\pi R}{\sqrt{R^2+Z^2}}$
- $\Rightarrow \boldsymbol{V(M) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\, R}{\sqrt{R^2+Z^2}}}$

- On déduire le vecteur champ $\vec{E}(M)$:
- On a : $E = -\frac{dV}{dZ} \Rightarrow \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dZ}}\left(\frac{\boldsymbol{\lambda\, R}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{Z}}{\left(\boldsymbol{R^2+Z^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\lambda\, R}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{Z}}{\left(\boldsymbol{R^2+Z^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

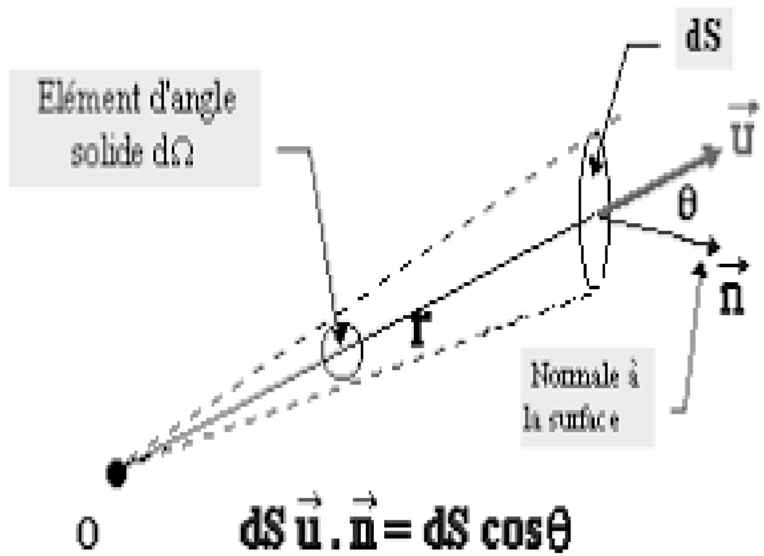
-
- $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{Z}) = \frac{\boldsymbol{\lambda\, R}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{Z}}{\left(\boldsymbol{R^2+Z^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{\boldsymbol{k}}$

IV. Flux électrostatique et théorème de Gauss :

- **IV.1. Le flux du champ électrique :**
  On appelle flux du champ électrostatique à une surface la grandeur :
- $\phi = \oiint \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dS}$
- avec : $\overrightarrow{dS} = dS\, \vec{n}$

$\overrightarrow{dS}$: est un élément de surface.

$\vec{n}$: vecteur unitaire sortant et normal à la surface élémentaire

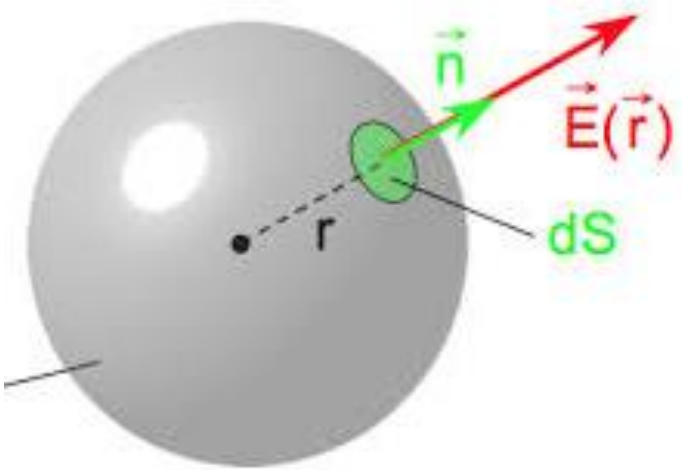


- $\phi = \oiint_S \vec{E} . \overrightarrow{dS} = \oiint_S E\, dS\, cos\theta$

IV.1. Théorème de Gauss :

Le théorème de gauss exprime la relation entre le flux électrique à travers une surface fermée et le nombre de charges présentes à l'intérieur du volume entouré par cette surface.

- $\phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$



- **Enoncé** : le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur du volume limité par cette surface divisé par la permittivité du vide ε_0.
- Si : $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS} \Rightarrow \oiint \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = 0$
- Si : $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS} \Rightarrow \oiint \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \oiint E\,.dS = E.S$

$\Rightarrow$ *Le théorème de Gauss est particulièrement utile lorsque nous désirons calculer le champ électrique produit par des distributions de charge ayant une certains symétrie géométriques comme : une sphère chargée.*

- La méthode est la suivante :
- Définir une surface fermée de Gauss passant par le point M ou l’on désire calculer le champ.
- Appliquer le théorème de Gauss.

3/ Application du théorème de Gauss :

- **3.1. Etudier le champ électrique crée par une sphère pleine chargée uniformément.**
- Considérons une sphère de rayon R et de charge totale Q.
- Les étapes : - dans ce cas nous avons une symétrie sphérique et le champ sortant selon $\overrightarrow{e_r}$ (charge positive) : $\vec{E}$ $=$E $\overrightarrow{e_r}$.

- La surface de Gauss qui convient ici (vu la symétrie du problème) est une sphère de rayon r et de centre O.

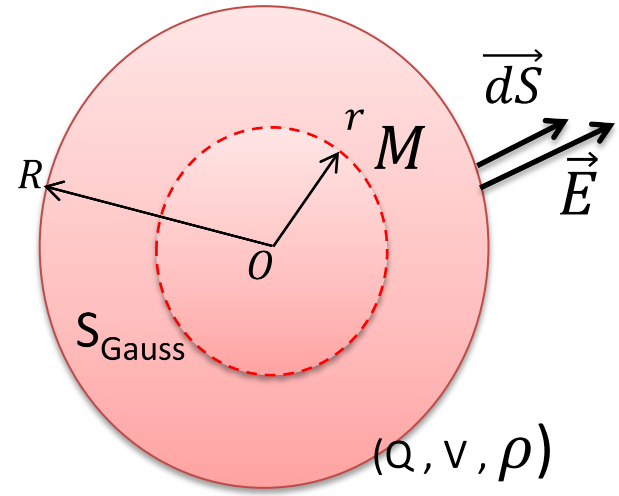
- En appliquant le théorème de Gauss on écrit :

$$\Phi = \oiint_{S} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$$

- **Pour r < R : calcul du champ à intérieur de la sphère**

- $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS} \Rightarrow \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS \Rightarrow \phi = \oiint_S \; E_1.dS = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

- Seule une partie de la charge porté de la sphère se trouve à l'intérieure de la surface de Gauss S_{Gauss} de rayon **r**.



- Avec : $S_{Gauss} = 4\pi r^2$;
- la distribution de charge dans

la sphère est volumique $\Rightarrow Q = \rho$.v

- v=$\frac{4}{3}\pi r^3 \;\Rightarrow\; d$v = $4\pi r^2\, dr$

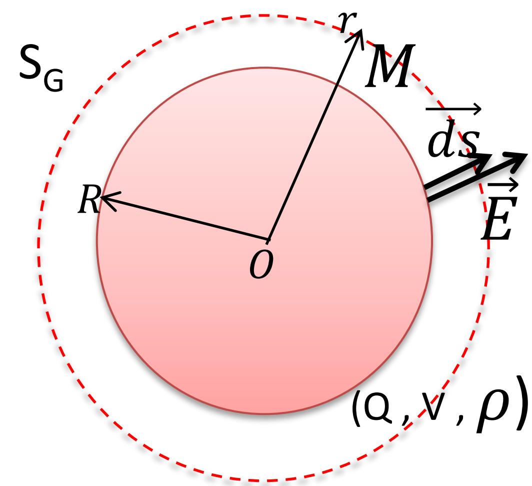
- $\Rightarrow Q = \rho \iiint dv = \rho \int_0^r 4\pi r^2 \, dr = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$
- $\Rightarrow \phi = \oiint_{\boldsymbol{S}} \; E_1 . dS = E_1 . S_G = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon_0}$
- $\Rightarrow E_1 . 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon_0}$
- $\Rightarrow \;\; \boldsymbol{E_1} \, (\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\ \varepsilon_0}} \boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{E_1}(\boldsymbol{r}) \mathit{est\ proportionnel}$ à $\boldsymbol{r}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E_1}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\ \varepsilon_0}} \boldsymbol{r} \, \vec{e}_r$$

Pour r > R : le champ à l'extérieur de la sphère

- $\phi = \oiint_S E_2 . dS = E_2 . S_G = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$
- $\sum Q_i = \rho \int_0^R 4\pi r^2 \, dr \Rightarrow \sum Q_i = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$
- $\Rightarrow E_2 . 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$

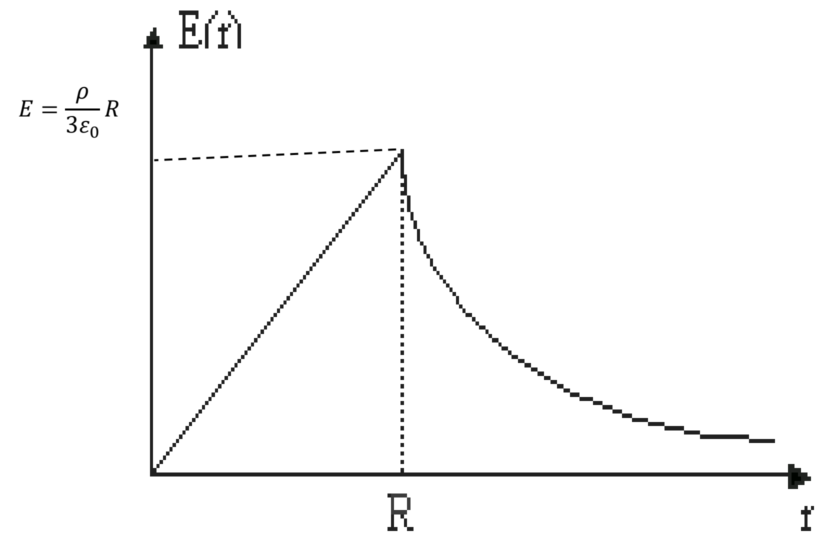
$$\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E_2}}\,(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\rho R^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r^2}} \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$$



- Le champ $E_2(r)$ est inversement proportionnel au carré de la distance r.

Remarque : $E_2(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$, la sphère se comporte comme une charge ponctuell

- **Le graphe de champ $\overrightarrow{E}$ en fonction de r :**
- $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} R$
- Si r=R $\Rightarrow E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} R$



- **En déduire le potentiel dans tous points de l'espace :**

- On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ ou $V = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dr}$
- $\vec{E} \,/\!/\, \overrightarrow{dS} \Rightarrow V = -\int E.dr$
- **Pour : r < R :**
- $V_1 = -\int E_1 dr = -\int \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0} r\ dr$
- $\Rightarrow V_1(r) = -\frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + C_1 \Rightarrow V_1(r) = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0} r^2 + C_1$
-
- **Pour : r > R :**
- $V_2 = -\int E_2 dr = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\ dr$
- $\boldsymbol{V_2(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2}$

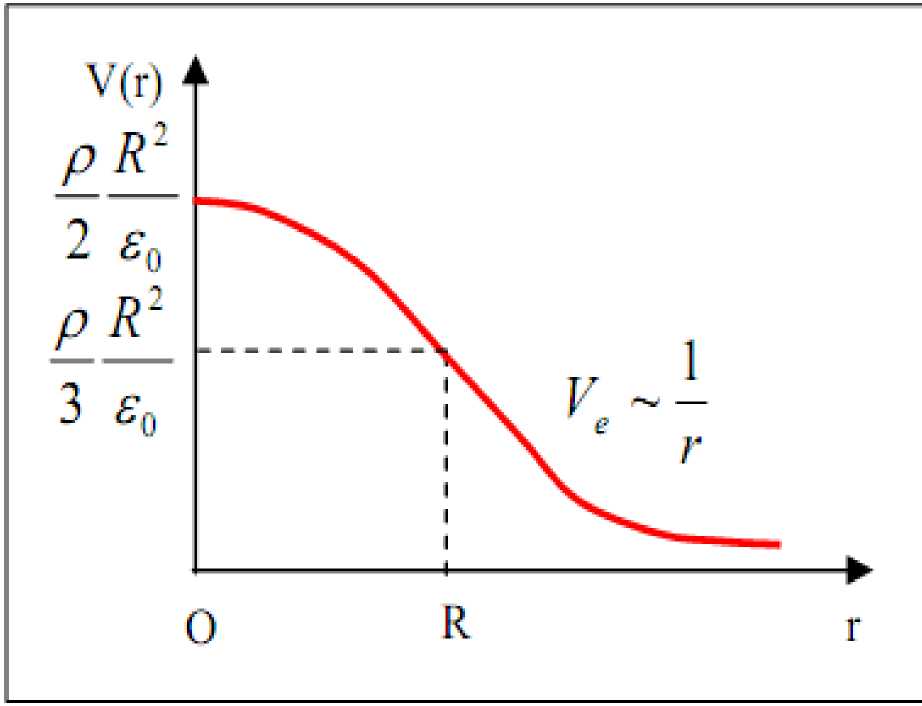
- $\Rightarrow$ Où C_2 est une constante d'intégration; en supposant que le potentiel nul à l’infini, quand $r \rightarrow \infty$ (il n'y a pas de charges à l'infini), nous obtenons C_2 = 0,

$$\Rightarrow \boldsymbol{V_2(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}}$$

- Et d'après les conditions de continuité ; le potentiel est une fonction continue donc : $V_1(R) = V_2(R)$ quand r = R.
- $\Rightarrow \ -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{R} \quad \Rightarrow \ C_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{R} + \frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}R^2$
- $\Rightarrow \ C_1 = \frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}R^2$

$$\boldsymbol{V_1(r) = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}R^2}$$

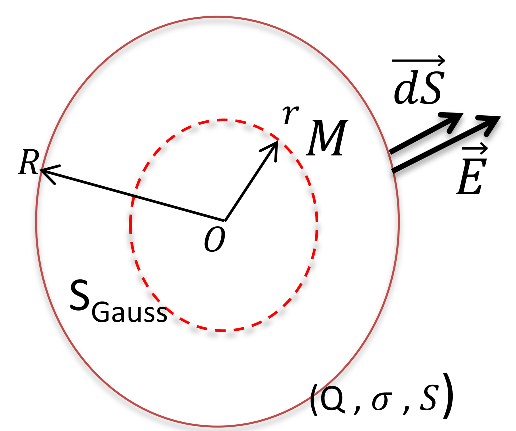
- La courbe de V(r) :



- Si r=R:
- $\Rightarrow \ V_1(R) = V_2(R) = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}R^2$

3.2. calcul du champ électrique et de potentiel crée par une sphère chargée uniformément en surface $\boldsymbol{\sigma}$.

- En appliquant le théorème de Gauss :
- $\phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$
- **Pour r < R : calcul du champ à intérieur de la sphère**



- Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires,

alors : $\vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS\cos 0 = E.dS$

- $\Rightarrow \phi = \oiint_S E_1.dS = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

- Dans ce cas, la charge à intérieur de la surface

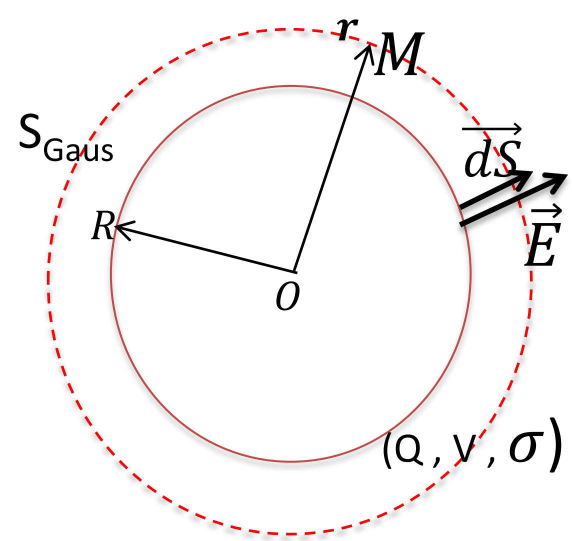
de Gauss est nulle $\sum Q_i = 0$.

- Donc : $\oiint_{\boldsymbol{S}} \; E_1 . dS = E_1 . S_G = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{E_1 = 0}$.

- **Pour r > R : calcul le champ à l'extérieur de la sphère :**
- $E_2 . S_G = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$
- Nous trouvons que la charge à intérieur de la surface de Gauss et la charge totale Q de la sphère chargée. $Q_i = \sigma S_{sphere}$

- $= \sigma \iint ds = \sigma \int_0^R 2\pi r \, dr \Rightarrow Q_i = \sigma \, 4\pi R^2$
- La surface de Gauss : $S_G = 4\pi r^2$.
- Donc :
- $E_2 . 4\pi r^2 = \frac{\sigma \, 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_2 = \frac{\sigma \, R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}}$
- $\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma \, R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r^2}} \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$
- Pour r=R $\Rightarrow E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.



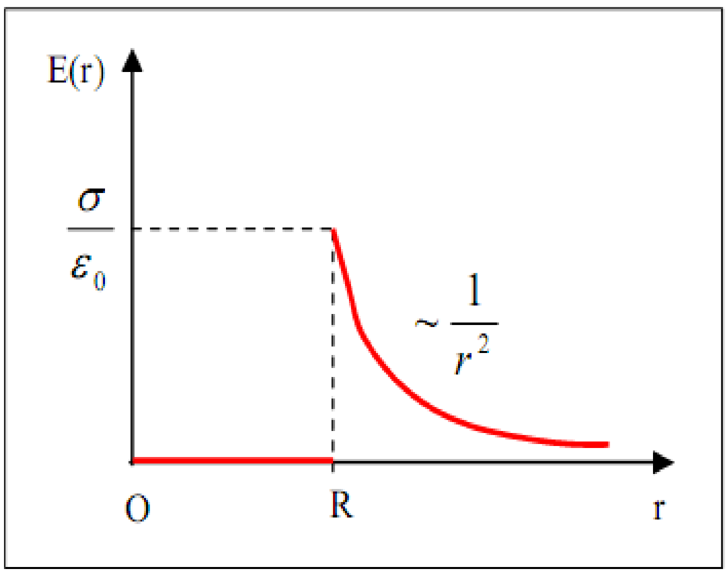
- **En déduire le potentiel V(r) :**
- **Pour r < R :** $\boldsymbol{E_1 = 0} \Rightarrow V_1 = -\int E_1 . dr = C_1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{V_1 = C_1}$
- **Pour r > R :** $V_2 = -\int E_2 . dr = -\int \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r^2}} . dr$
- $\Rightarrow \mathrm{V}_2 = \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + C_2$
- D'après les conditions aux limites : $r \to \infty \Rightarrow V_2(\infty) = 0$
  $\Rightarrow C_2 = 0$
- d'où l'expression de $\mathbf{V_2}$ s'écrit : $\mathbf{V_2}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$

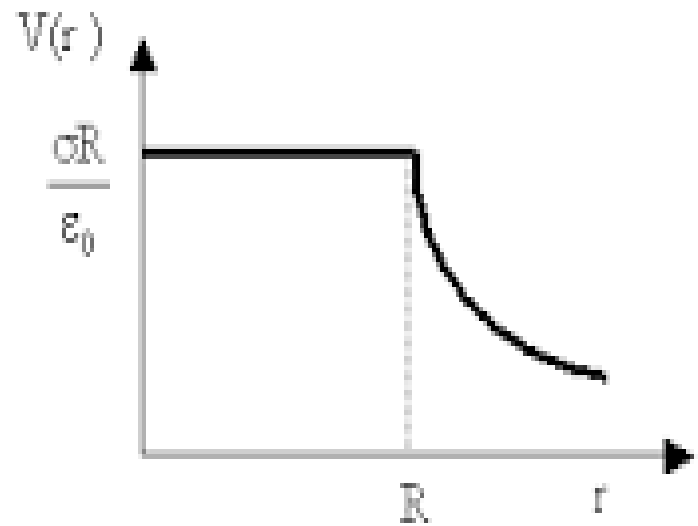
et d'après la condition de continuité quand r = R:

$$V_1(R) = V_2(R)$$

-
- $\Rightarrow C_1 = \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}} \quad \Rightarrow \ C_1 = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} R \quad \Rightarrow \ \mathbf{V_1}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} R.$

- **Les courbes du champ et de potentiel :**
- Quand r=R : $\mathbf{V_1} = \mathbf{V_2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} R$



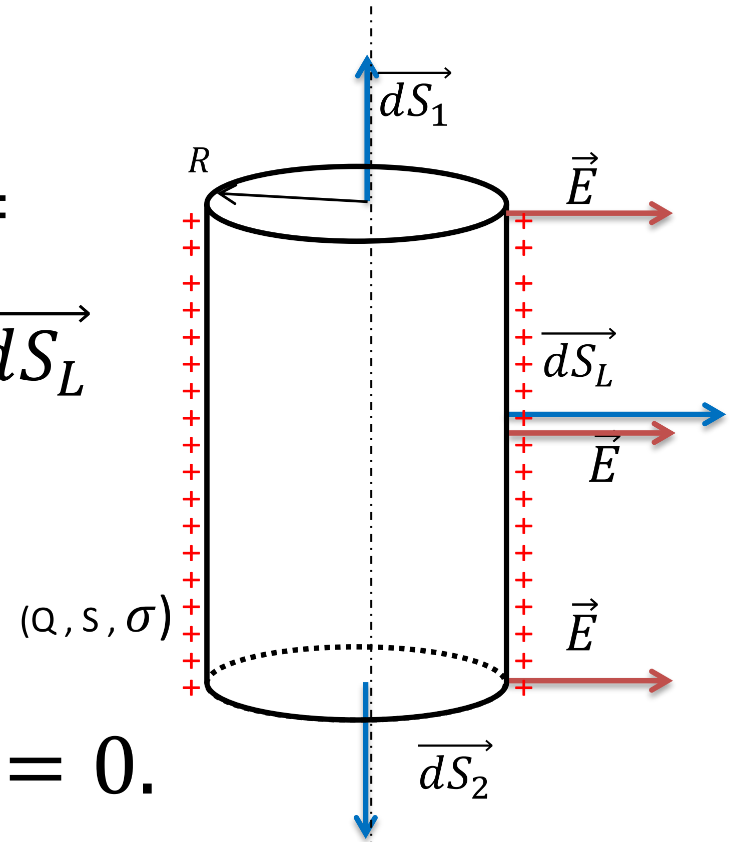


3.3. Le champ électrique crée par un cylindre de rayon R et de longueur infini :

a/ cas d’un cylindre chargé uniformément en surface.

- Considérons un cylindre de rayon R ; de longueur infini chargé uniformément avec une charge totale Q de densité σ positive et constante.
- La surface de Gauss qui convient à ce cas est un celle d’un cylindre de longueur L et de rayon r.

- Il y a trois surfaces : les surfaces des deux bases S_1 et S_2 et la surface latéral S_L mais le champ est radial.
- Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à traves chaque surface :



- Soit : $\phi = \sum \phi_i = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} =$

$= \oiint_{S_1} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oiint_{S_2} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \oiint_{S_L} \vec{E}.\overrightarrow{dS_L}$

- Avec : $\vec{E} = \overrightarrow{e_r}$; et $\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}$
- On a : $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_2} \Rightarrow$

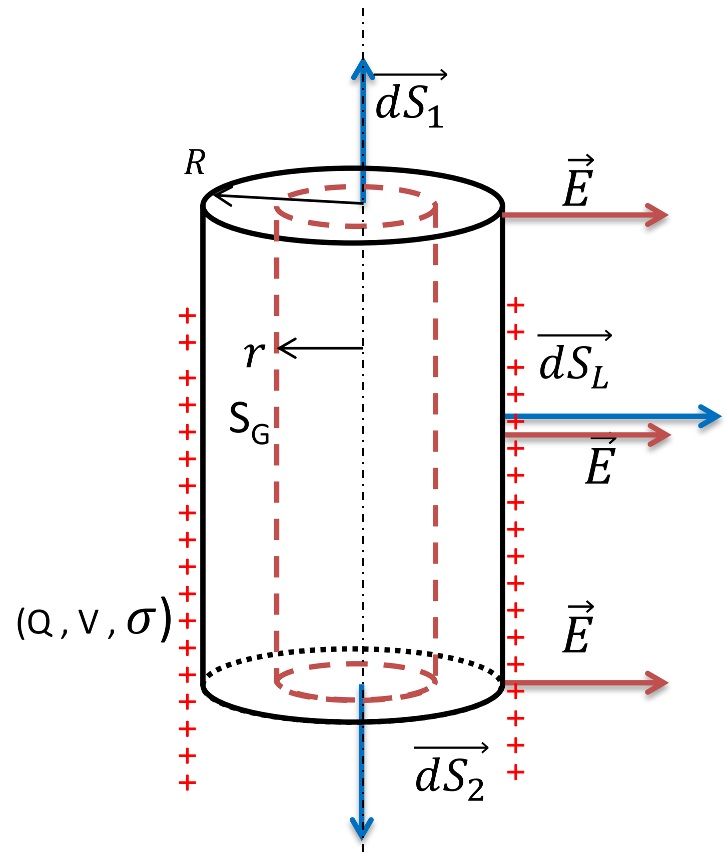
$$\vec{E}.\overrightarrow{dS_1} = E.dS.cos\frac{\pi}{2} = \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} = 0.$$

- Et : $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS_L}$ (colinéaires).
- $\Rightarrow \phi = \oiint_{S_L} \vec{E}.\overrightarrow{dS_L} = E.S_L = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

- Si **r < R** : $\sum Q_i = 0$

$\Rightarrow$

- $E_1 = 0 \quad\quad \Rightarrow V_1 = C_1.$



- Si **r > R** : $E_2 . S_{Gauss} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

- $S_{Gauss} = 2\pi r L$ et $\sum Q_i = \sigma S = \sigma\, 2\pi R L$

- $\Rightarrow E_2 . 2\pi r L = \frac{\sigma\, 2\pi R L}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E_2(r) = \frac{\sigma\, R}{\varepsilon_0}\ \frac{1}{r}$

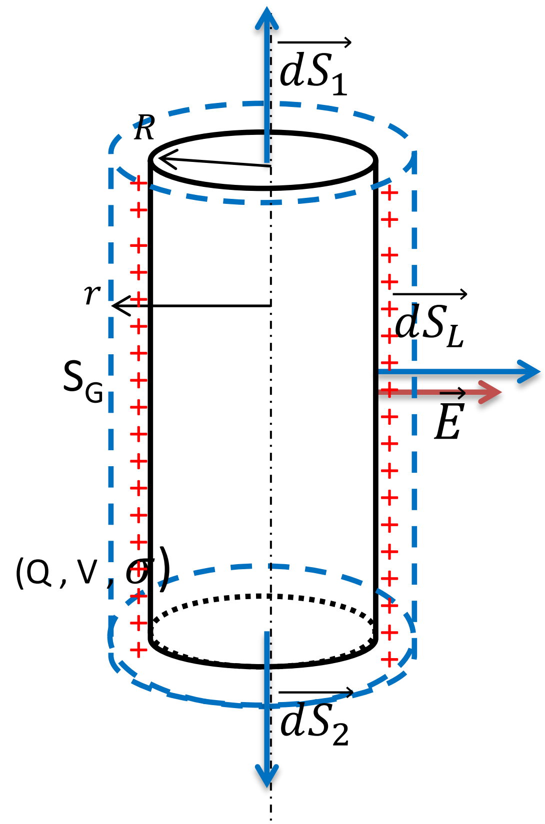
$\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E_2}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma\, R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$

-

- Et le potentiel : $V_2 = -\int E_2 . dr$

$$= -\int \frac{\boldsymbol{\sigma\, R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} . \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} . dr$$

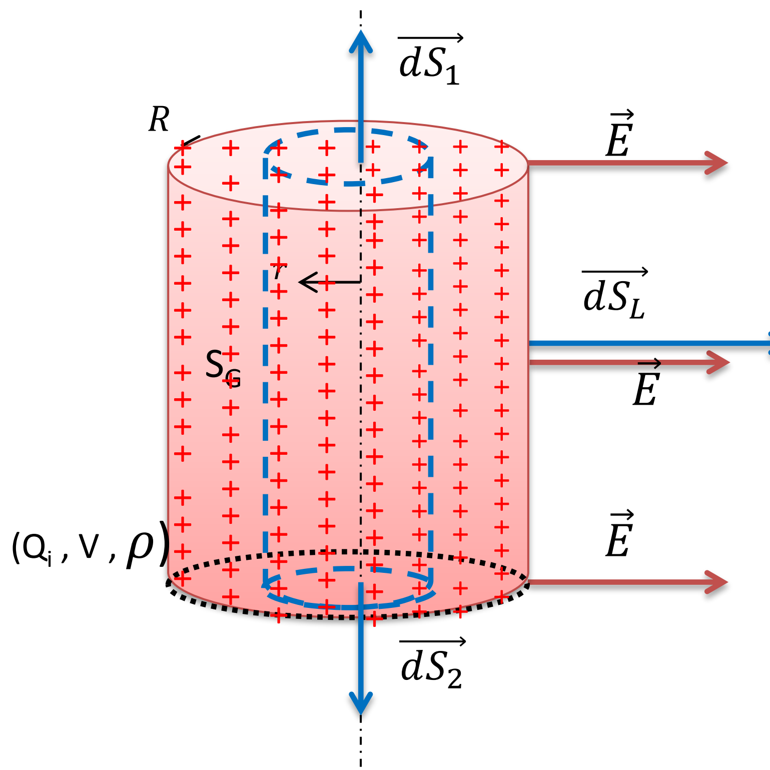
- $V_2 = -\frac{\boldsymbol{\sigma\, R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{r}| + \boldsymbol{C_2}$



- Pour un cylindre infini, on peut pas déterminé les constantes C_1 et C_2.

- **b/ cas d'un cylindre chargé uniformément en volume.**

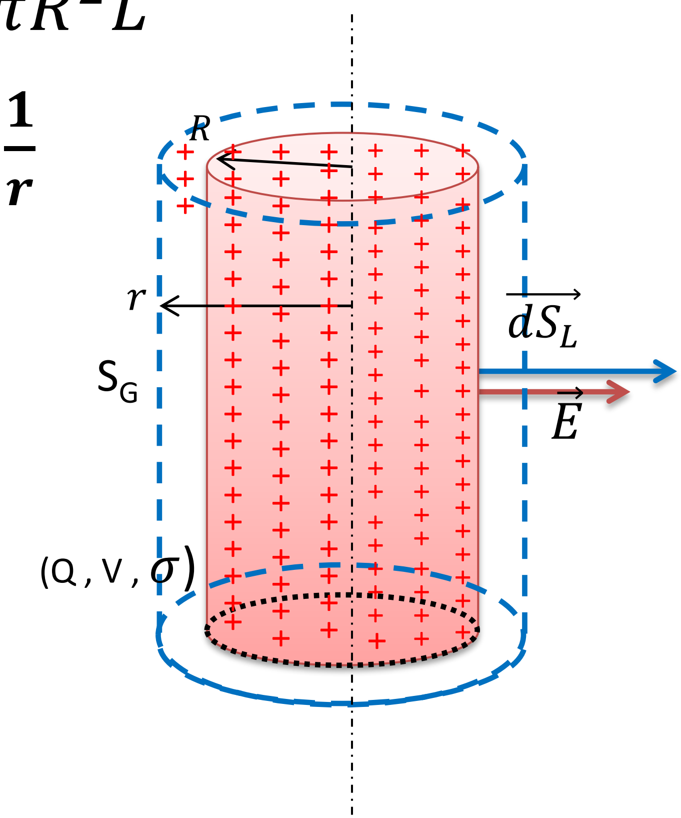
- Soit : $\phi = \sum \phi_i = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \oiint_{S_L} \vec{E}.\overrightarrow{dS_L}$
- Avec : $\vec{E} = \overrightarrow{e_r}$; et $\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}$
- $\vec{E} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{dS_L} \Rightarrow \phi = E.S_L = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$.
- Si **r < R** :
- $E_1.S_L = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$,



- $\sum Q_i = \rho \iiint dv = \rho \int_0^r 2\pi r L \, dr = \rho \pi r^2 L$
- Volume du cylindre $v = \pi r^2 L$ et $S = 2\pi r L$
- Et la surface du Gauss est la surface du cylindre de rayon r et de centre O. $S_{Gauss} = 2\pi r L$
- $\Rightarrow E_1 . 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0}$ $\quad \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$
- $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r \, \overrightarrow{e_r}}$
- **Le potentiel** : $V_1 = - \int \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r \, dr$

  $\Rightarrow \boldsymbol{V_1(r) = - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 \, C_1.}$

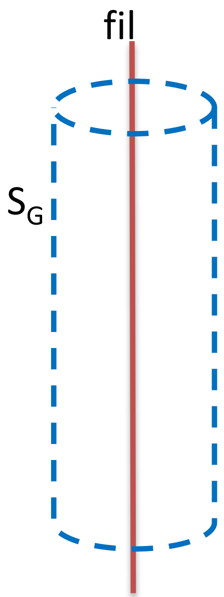
- <u>Si **r > R** :</u>
- $E_2.S_{Gauss} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$
- Nous trouvons que la charge à intérieur de la surface de Gauss et la charge totale $\sum Q_i$ du cylindre chargé de rayon R. $\sum Q_i = \rho v_{cylin}$
- $\sum Q_i = \rho \iiint dv = \rho \int_0^R 2\pi r L \, dr = \rho \pi R^2 L$
- $E_2.2\pi r L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{E_2(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$
- $\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{E_2}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}\overrightarrow{e_r}}$
- **Le potentiel** : $V_2(r) = -\int \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r} dr$
- $\Rightarrow \boldsymbol{V_2(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln|r| + C_2.}$



- **3.4. Le champ électrique crée par un fil infini chargé avec une densité linéaire λ :**
- Le même principe de cylindre.
- $\phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \oiint_{S_L} \vec{E}.\overrightarrow{dS_L} = E.S_L = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$.
- Avec : $\sum Q_i = \lambda L$
- et la surface de Gauss est cylindre

de rayon r et de longueur L :

$$S_{Gauss} = 2\pi r L$$



- donc le champ crée en un point M de l’espace est :
- $E.S_G = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2\,\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$
- $\Rightarrow \boldsymbol{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\overrightarrow{e_r}}$
- Et le potentiel : $V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}dr$
- $\Rightarrow \boldsymbol{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln|r| + C}$

- **3.4/ Plan infini chargé :**

- On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$.
- On veut calculer le champ électrique crée par cette distribution de charge en tout point de l'espace au voisinage de ce plan.
- On choisit comme surface de Gauss un cylindre qui traverse ce plan infini chargé.

- Le flux de $\vec{E}$ à travers ce cylindre est :

- $\phi = \oiint_{S_1} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oiint_{S_2} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \oiint_{S_L} \vec{E}.\overrightarrow{dS_3}$
$= \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$
- avec : $\vec{E} = \overrightarrow{e_r}$; et $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$
- $S_1 = S_2$: sont les surfaces des bases du cylindre et S_3 est la surface latérale du cylindre.

- On a : $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_3} \Rightarrow \vec{E}.\overrightarrow{dS_3} = 0$
- et $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS_1} \parallel \overrightarrow{dS_2}$

$$et\ \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} = \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} = E.dS.cos0 = E.dS.$$

- $\sum Q_i = \sigma.S$ donc : $E.S_1 + E.S_1 = 2E.S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$
- $\Rightarrow\ E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$