République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mostefa Benboulaid - Batna 2

Faculté de Technologie

Département de Socle Commun Sciences et Technologie

MÉTHODES NUMÉRIQUES

2ème Année Socle Commun Sciences et Technologie (S4)

Chargés de cours :

Pr. K. MEFTAH k.meftah@univ-batna2.dz

Pr. M. ZIDANI m.zidani@univ-batna2.dz

Pr. S. DERFOUF s.derfouf@univ-batna2.dz

Année Universitaire : 2020/2021

Table des matières

Introduction générale

Ce cours est une introduction aux méthodes d'analyse numérique très largement utilisées afin de résoudre certains problèmes mathématiques que l'on rencontre dans la modélisation de phénomènes physiques, mécaniques, chimiques ou biologiques, en général issus de la modélisation de problèmes "réels", et dont on cherche à calculer la solution à l'aide d'un ordinateur. Ce domaine particulièrement vaste nécessite simultanément des connaissances mathématiques, informatiques et physiques.

De larges classes de problèmes numériques montrent la nécessité de bien caractériser les propriétés mathématiques du problème considéré afin de choisir la méthode numérique la mieux adaptée pour le traitement numérique. Le niveau de ce cours est introductif et il n'exige aucun autre prérequis que le niveau de connaissances acquis en première année Tronc Commun des Sciences et de la Technologie. Reconnaissons qu'il est difficile de faire preuve de beaucoup d'originalité sur ce sujet déjà bien classique dans la littérature. J'ai inclus d'assez nombreux exemples et exercices, souvent élémentaires, y compris dans le cours de texte, dans l'espoir d'aider à la compréhension des étudiants. Ces exemples et exercices reprennent en particulier les sujets d'examen et les travaux dirigés que j'ai proposés à mes étudiants. Ce polycopie a été rédigé pour Licence deuxième année Socle Commun Sciences et Technologie de l'Université Batna 2 et est organisé comme suit :

— Le chapitre 1 traite la résolution des équations non linéaires,

— Le chapitre 2 développe les méthodes d'interpolation polynomiale,

— Le chapitre 3 donne les différentes méthodes d'intégration numérique,

— Le chapitre 4 est consacré aux équations différentielles ordinaires,

Chaque chapitre est suivi d'un certain nombre d'exemples. On donne ensuite des suggestions pour effectuer les exercices, puis des corrigés détaillés. Il est fortement conseillé d'essayer de faire les exercices d'abord sans ces indications, et de ne regarder les corrigés détaillés qu'une fois l'exercice achevé (même si certaines questions n'ont pas pu être effectuées), ceci pour se préparer aux conditions d'examen.

Chapitre 1

Résolution des équations non linéaires

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'approximation des zéros (ou racines dans le cas d'un polynôme) d'une fonction réelle d'une variable réelle, c'est-à-dire, étant données un intervalle $I \subset R$ et une application f de I dans R la résolution approchée du problème : trouver $r \in R$ tel que :

$$f(r) = 0 \tag{1.1}$$

Toutes les méthodes que nous allons présenter sont itératives et consistent donc en la construction d'une suite de réels $(x^{(k)})_{k \in N}$ qui, on l'espère, sera telle que :

$$\lim_{n \to \infty} (x^k) = r \tag{1.2}$$

La détermination de la solution s'effectue à partir d'un intervalle de recherche donné par des méthodes itératives dont l'initialisation se borne au choix d'un point(s) de départ. En fait, on ne trouve jamais la valeur qui annule exactement l'équation ou le système, mais une approximation.

Les algorithmes classiques que nous allons étudier sont les suivants :

1. Méthode de la Bissection,
2. Méthode du point fixe,
3. Méthode de Newton-Raphson.

1.2 Critères d'arrêt

Comme nous l'avons signalé, on ne peut pas trouver numériquement la solution exacte r mais seulement une approximation suffisamment bonne de cette racine x^n, grâce à un processus itératif que l'on aura délibérément stoppé à une certaine étape N. Pour définir cette étape, il faut définir un critère d'arrêt. Si ce critère est mal choisi, l'approximation de la racine sera mauvaise, ce qui peut avoir des répercussions importantes sur la suite des calculs. En cas de convergence, la suite $(x^{(k)})_{k\in N}$ construite par la méthode itérative tend vers le zéros r quand k tend vers l'infini. Par conséquent l'algorithme sera arrêté en utilisant l'un des tests suivants, où ϵ désigne la précision à laquelle on souhaite obtenir la solution :

$$\mid x_n - x_{n-1} \mid \leq \epsilon \tag{1.3}$$

ou

$$\frac{\mid x_n - x_{n-1} \mid}{\mid x_n \mid} \leq \epsilon \tag{1.4}$$

Si l'on choisit de contrôler le résidu, on met fin aux itérations dès que :

$$\mid f(x_n) \mid \leq \epsilon \tag{1.5}$$

c'est-à-dire $f(x_n)$ est presque nulle, ou :

$$\mid \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})} \mid \leq \epsilon \tag{1.6}$$

Le processus sera considéré comme non convergent, vers la solution cherchée, si la précision ϵ souhaitée n'est pas atteinte au delà d'un nombre (raisonnable) d'itérations, N_{max}, fixé à l'avance.

Remarque : Dans la recherche de zéro d'une fonction, il est recommandé d'appliquer un critère d'arrêt portant à la fois sur la variable et sur la fonction.

1.3 Méthode de Dichotomie (Bissection)

Cette méthode repose sur une idée toute simple, à savoir qu'en général, de part et d'autre d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, $f(x)$ change de signe et passe du positif au négatif ou vice versa, c'est-à-dire :

$$f(a).f(b) < 0 \tag{1.7}$$

De toute évidence, ce n'est pas toujours le cas puisque la fonction $f(x)$ peut aussi être tangente à l'axe des x. Les différentes étapes de la méthode peuvent être résumées dans l'algorithme suivant.

1.3.1 Algorithme de la méthode de Dichotomie

1. Étant donné un intervalle $[a, b]$ pour lequel $f(x)$ continue et possède un changement de signe :
   $f(a).f(b) < 0$
2. Étant donné ϵ, le critère d'arrêt, ou N, le Nombre maximal d'itérations,
3. Poser : $i = 0$
4. Poser : $a_0 = a$ et $b_0 = b$
5. Poser : $x_i = (a_i + b_i)/2$
6. Si x_i est une approximation satisfaisante, aller à étape 12 sinon, aller à étape 7
7. Si $f(x_i).f(a_i) > 0$, aller à étape 8
   Si $f(x_i).f(a_i) < 0$, aller à étape 10
8. Poser $a_{i+1} = x_i$ et $b_{i+1} = b_i$
9. $i = i + 1$ et aller à étape 5
10. Poser $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = x_i$
11. $i = i + 1$ et aller à étape 5
12. Fin

1.3.2 Nombre d'itérations

Théorème 1.3.1 *Soit une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, vérifiant $f(a).f(b) < 0$, et soit $r \in [a, b]$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. Alors, la suite $(x^{(k)})_{(k \in N)}$ construite par la méthode de bissection converge vers r et on a l'estimation :*

$$|x^{(k)} - r| \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}} \quad ; \quad \forall k \in N \tag{1.8}$$

En passant à la limite pour $k \to \infty$, cette inégalité entraine $x_k \to r$.

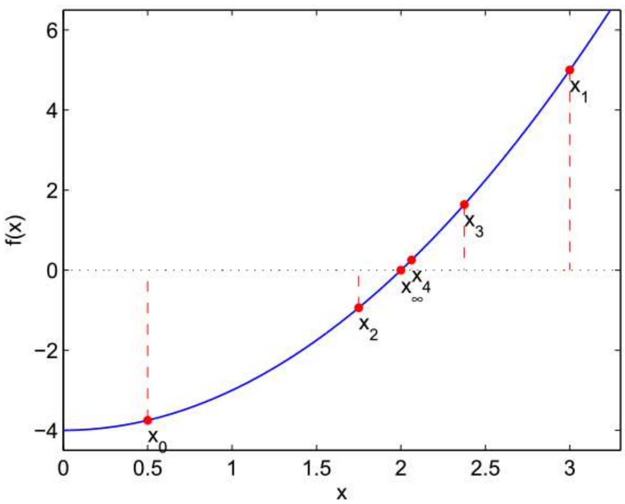

FIGURE 1.1 – Méthode de Dichotomie (Bissection)

Cette inégalité nous permet d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour approcher r avec une précision donnée ϵ. Par exemple pour avoir une erreur ne dépassant pas ϵ , il suffit que :

$$\frac{(b-a)}{2^{n+1}} \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad log\left[\frac{(b-a)}{2^{n+1}}\right] \leq log(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad log\left[\frac{2^{n+1}}{(b-a)}\right] \geq log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \tag{1.9}$$

$$n \geq \frac{log(\frac{b-a}{\epsilon}) - log(2)}{log(2)} = \frac{log(\frac{b-a}{2\epsilon})}{log(2)} \tag{1.10}$$

A.N. Si $\epsilon = 10^{-5}$, $b = 2$, $a = 1$ donc $n \geq 15.6$; c'est-à-dire le nombre d'itérations nécessaire est $n = 16$.

Exemple 1.3.1 On utilise la méthode de bissection pour approcher la racine du polynôme $f(x) = x^3 + 2x^3 - 3x - 1$ continue dans l'intervalle $[1, 2]$, avec une précision égale à 10^{-4}. Nous avons $f(1) = -1$ et $f(2) = 9$ donc $f(1).f(2) < 0$. En appliquant l'algorithme de bissection, nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1	2	1.5	2.375
1	1	1.5	1.25	0.328125
2	1	1.25	1.125	-0.419922
3	1.125	1.25	1.1875	-0.067627
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	1.198486	1.19873	1.198608	-0.000506
13	1.198608	1.19873	1.198669	-0.000133

Table 1.1 – Résultats de l'exemple 1.3.1

Après 13 itérations on peut dire que $x_{13} = 1.198669$ approxime r avec une erreur :

$$|r - x_{13}| \leq \frac{(b_{13}-a_{13})}{2} = \frac{(b-a)}{2^{14}} = 0.00061 < \epsilon$$

Le nombre d'itérations nécessaires est :

$$n \geq \frac{log(\frac{b-a}{2\epsilon})}{log(2)} = 12.28 \text{ donc } n = 13$$

Remarque : L'inconvénient de cette méthode est que la convergence est lente et possède une convergence linéaire : si $\epsilon_k = |r - x_k|$ est l'écart à la k^{ime} itération entre x_k et la racine x_∞, alors en moyenne $\epsilon_{k+1} = c\epsilon_k$, où $0 < c < 1$ est une constante. On utilise cette méthode pour faire démarrer d'autre méthode (Newton, point fixe, ...) plus performantes.

Exemple 1.3.2 La fonction $x^2 - 4 = 0$, dont la solution est la racine recherchée. L'intervalle de départ est [0.5,3]. Cela donne :

Itération	Intervalle	Nlle valeur		Erreur
k		x_{k+2}	$f(x_{k+2})$	$\lvert\varepsilon_{k+2}\rvert$
0	[0.5000, 3.0000]	1.7500	-0.9375	0.2500
1	[1.7500, 3.0000]	2.3750	1.6406	0.3750
2	[1.7500, 2.3750]	2.0625	0.2539	0.0625
3	[1.7500, 2.0625]	1.9062	-0.3662	0.0938
4	[1.9062, 2.0625]	1.9844	-0.0623	0.0156
5	[1.9844, 2.0625]	2.0234	0.0943	0.0234
6	[1.9844, 2.0234]	2.0039	0.0156	0.0039

Table 1.2 – Résultats de l'exemple 1.3.2

1.4 Méthode de point fixe

La méthode de point fixe utilise le fait que le problème $f(x) = 0$ peut toujours ramener au problème équivalent :

$$x - g(x) = 0 \tag{1.11}$$

Théorème 1.4.1 *Soit* $[a, b]$ *un intervalle non vide de* R *et* g *une application continue de* $[a, b]$ *dans lui même. Alors, il existe un point* r *de* $[a, b]$ *appelé point fixe de la fonction* g, *vérifiant* $g(r) = r$.

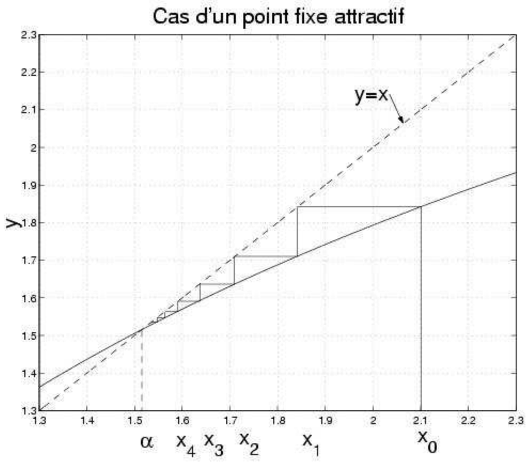

FIGURE 1.2 – Méthode de point fixe

1.4.1 Algorithme de la méthode de point fixe

Soit l'équation $x = g(x)$ et une approximation x_0.
Alors pour améliorer celle-ci on doit procéder de la manière suivante :

1. Poser : $i = 1$
2. Poser : $x_i = g(x_{i-1})$
3. Si l'approximation et satisfaisante, aller à étape 5 sinon, aller à étape 4
4. $i = i + 1$ et aller à étape 2
5. Fin

Exemple 1.4.1 Soit l'équation $F(x) = x^2 - x - 3ln(x) = 0$ elle peut s'écrire, sous la forme $x = g(x)$ avec :

- ▷ $g(x) = x^2 - 3ln(x) = x$,
- ▷ $g(x) = \sqrt{x + 3ln(x)} = x$,
- ▷ $g(x) = e^{(x^2-x)/3} = x$.

où il faut choisir l'écriture permettant la convergence du processus itératif : $x_{n+1} = g(x_n)$ vers la solution cherchée, lorsque cette convergence est possible.

1.4.2 Convergence de la méthode de point fixe

Nous nous intéressons au comportement de la méthode des points fixes pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$. On a d'abord transformé cette équation sous la forme $x = g(x)$. Soit r, une valeur qui est à la fois une racine de $f(x)$ et un point fixe de la fonction $g(x)$, c'est-a-dire qui vérifie $f(r) = 0$ et $r = g(r)$.
On définit l'erreur à l'étape n comme étant :

$$e_n = x_n - r \tag{1.12}$$

On cherche à déterminer sous quelles conditions l'algorithme des points fixes converge vers la solution r. Ce sera bien sur le cas si l'erreur e_n tend vers 0 lorsque n devient grand. Il est intéressant de suivre le comportement de l'erreur au fil des itérations.

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) \tag{1.13}$$

On peut alors utiliser un développement de Taylor de la fonction $g(x)$ autour de la racine r. La relation 1.13 devient :

$$e_{n+1} = g(r + e_n) - g(r) = (g(r) + g'(r)e_n + \frac{g''(r)e_n^2}{2!} + \frac{g'''(r)e_n^3}{3!} + \cdots) - g(r) \tag{1.14}$$

On eu conclut que :

$$e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)e_n^2}{2!} + \frac{g'''(r)e_n^3}{3!} + \cdots \tag{1.15}$$

Au voisinage de la racine r, le premier terme non nul de l'expression de droite sera déterminant pour la convergence selon l'équation 1.15, si $g'(r) \neq 0$ et si on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en e_n, on a :

$$e_{n+1} \simeq g'(r)e_n \tag{1.16}$$

On voit que l'erreur à l'étape $(n+1)$ est directement proportionnelle à l'erreur à l'étape (n). L'erreur ne pourra donc diminue que si :

$$|g'(r)| < 1 \tag{1.17}$$

Cette condition est une condition nécessaire de convergence d'une méthode de point fixe.

Exemple 1.4.2 Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $x \in [1, 2]$. Trouver une valeur approchée de la solution r de $f(x) = 0$ par la méthode du point fixe.

L'équation $f(x)$ peut être transformée en une équation équivalente :

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2(x+4) = 10 \Rightarrow x = (\tfrac{10}{x+4})^{1/2} = g(x)$$

$$g(x) = x \text{ où } g(x) = [10/(x+4)]^{1/2}$$

Avant d'appliquer l'algorithme du point fixe, assurons nous que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ où :

$$x_n = g(x_{n-1}) = (\tfrac{10}{x_{n-1}+4})^{1/2} \text{ pour } n = 1, 2, ... \text{ et } x_0 = 1.5$$

converge vers le point fixe de $g(x)$, $x \in [1, 2]$.
$g'(x) = -\frac{\sqrt{10}}{2(4+x)^{3/2}} < 0$, $x \in [1, 2]$, donc g est décroissante sur $[1, 2]$ et par conséquent :

$$g(2) = 1.29 \leq g(x) \leq g(1) = 1.41, \ \forall x \in [1, 2]$$

C'est-à-dire que $g(x) \in [1, 2]$, $\forall x \in [1, 2]$. Donc $g(x)$ est continue sur $[1, 2]$.

$$g'(x) = -\tfrac{\sqrt{10}}{2(4+x)^{3/2}} \text{ donc } |g'(x)| \leq \tfrac{\sqrt{10}}{2(4+1)^{3/2}} = 0.1414 < 1$$

Donc $g(x)$ satisfait au conditions.
$x_n = g(x_{n-1})$ converge vers le point fixe r de $g(x)$ $\forall x_0 \in [1, 2]$:
$x_1 = g(1.5) = 1.3483$
$x_2 = g(x_1) = 1.3673$
$x_3 = g(x_2) = 1.3649$
$x_4 = g(x_3) = 1.3652$
$x_5 = g(x_4) = 1.3652$
Arrêtons nous à cette 5ième itération et acceptons la comme une bonne approximation du point fixe de g. Remarquons que la fonction $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ est aussi équivalente à $x = x - x^3 - 4x^2 + 10$. Dans ce cas :

$$g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10 \Rightarrow \text{pour } x = 1 \text{ nous avons : } \quad |g'(x)| = 10 > 1$$

Avec ce choix de $g(x)$, l'algorithme du point fixe engendre une suite divergente :

$x_1 = g(1.5) = -0.875$

$x_2 = g(x_1) = 6.73$

$x_3 = g(x_2) = -469.26$

$x_4 = g(x_3) = 1.02 \times 10^8$

1.5 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson, encore appelée *méthode des tangentes* a été exposée par Newton vers 1669 et complétée par Joseph Raphson (1648-1715) en 1690. C'est l'une des méthodes des plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires et nécessite de plus que la fonction f dont on cherche à déterminer une racine, soit dérivable au voisinage de celle-ci. Cette méthode est basée sur l'utilisation du développement de Taylor. Cette approche est également valable pour les systèmes d'équations non linéaires, soit une équation à résoudre de la forme :

$$f(x) = 0 \tag{1.18}$$

A partir d'une valeur initiale x_0 de la solution, on cherche une correction δx telle que :

$$0 = f(x_0 + \delta x) \tag{1.19}$$

En faisant un développement de Taylor autour de $x = x_0$, on trouve :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)\delta x + (f''(x_0)(\delta x)^2)/2! + (f'''(x_0)(\delta x)^3)/3! + \cdots \tag{1.20}$$

Il suffit maintenant de négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en δx pour obtenir :

$$0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)\delta x \tag{1.21}$$

On peut alors isoler la correction recherchée :

$$\delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{1.22}$$

La correction δx et en principe la quantité que l'on doit ajouter à x_0 pour annuler la fonction $f(x)$. On pose :

$$x_1 = x_0 + \delta x \tag{1.23}$$

Donc :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{1.24}$$

On recommence le processus en cherchant à corriger x_1 d'une nouvelle quantité δx. On obtient alors l'algorithme suivant :

1.5.1 Algorithme de la méthode de Newton-Raphson

1. Étant donné ϵ, critère d'arrêt.
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations.
3. Étant donné x_0, une valeur initiale de la solution
4. Effectuer : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
5. Si $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$:

   Convergence atteinte.

   Écrire la solution x_{n+1}.

   Arrêt.
6. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint :

   Convergence non atteinte en N itération.

   Arrêt.
7. Retour à l'étape 4.

Exemple 1.5.1 Soit à trouver le zéro de la fonction $f(x) = sin(x) - cos(x)$ sur $[0, 1]$. Le schéma itératif est donc :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{sin(x_k) - cos(x_k)}{sin(x_k) + cos(x_k)} \tag{1.25}$$

Pour $x_0 = 0$, la résolution numérique donne :

k	x_k	$f(x_k)$
0	0.000000	-1.00000
1	1.000000	-1.00000
2	0.7820419	$+3.01168 \times 10^{-1}$
3	0.7853981	-4.74646×10^{-3}
4	0.7853981	$+1.78222 \times 10^{-8}$

TABLE 1.3 – Résultats de l'exemple 1.5.1

Exemple 1.5.2 On cherche à résoudre l'équation $f(x) = e^{-x} - x = 0$. Pour utiliser la méthode de Newton, il faut obtenir la dérivée de cette fonction, qui est $f'(x) = -e^{-x} - 1$. L'algorithme se résume à :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}$$

Les résultats sont compilés dans le tableau suivant à partir de $x_0 = 0$:

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.0000000	$+1.00000$
1	0.5000000	$+0.10653$
2	0.5663110	$+0.13451 \times 10^{-3}$
3	0.5671432	$+0.14169 \times 10^{-7}$
4	0.5671433	-0.15016×10^{-8}

Table 1.4 – Résultats de l'exemple 1.5.2

On remarque la convergence très rapide de cette méthode par rapport à la méthode du point fixe. On considère la résolution de $e^{-x} - x = 0$, que l'on transforme en un problème de points fixes $x = e^{-x}$. En partant de x_0 et en posant $g(x) = e^{-x}$, on obtient le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	35
x_n	0	1.000000	0.3678794	0.6922006	0.5004735	$\cdots$	0.5671433

Table 1.5 – Résultats de l'exemple 1.5.2

1.5.2 Interprétation géométrique

La figure suivante permet de donner une interprétation géométrique assez simple de la méthode de Newton. Sur cette figure, on a représenté la fonction $f(x)$, la valeur initiale x_0 et le point $(x_0, f(x_0))$ qui est sur la courbe. La droite tangente à la courbe en ce point est de pente $f'(x)$ et a pour équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.26}$$

Cette droite coupe l'axe des x en $y = 0$, c'est-à-dire en

$$x_1 = x_0 - (f(x_0))/(f'(x_0)) \tag{1.27}$$

qui devient la nouvelle valeur estimée de la solution on reprend ensuite le même raisonnement à partir du point $(x_1, f(x_1))$ et ainsi de suite.

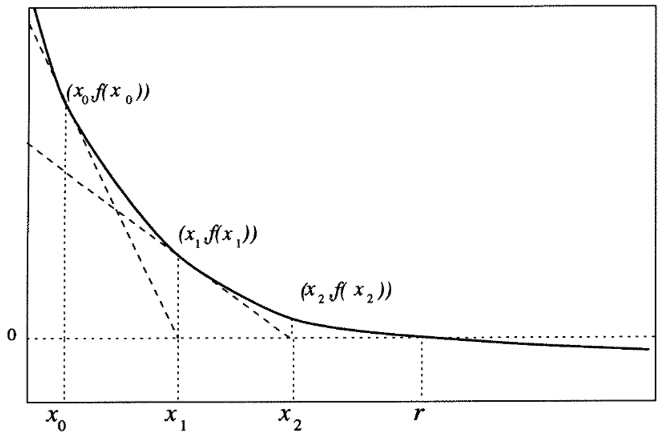

FIGURE 1.3 – Méthode de Newton-Raphson

1.5.3 Analyse de convergence

La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode des points fixes où :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1.28}$$

On sait que la convergence dépend de $g'(r)$ et on a dans ce cas précis :

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \tag{1.29}$$

Puisque $f(r) = 0$, r étaient une racine, on a immédiatement $g'(r) = 0$ et donc une convergence au moins quadratique. Avec : $f(a).f(b) < 0$; $f'(x) \neq 0$ et $f''(x) \neq 0$.

Remarque : La convergence de la méthode de Newton dépend de la valeur initiale x_0. Malgré ses propretés de convergence, une mauvaise valeur initiale peut provoquer la divergence de cette méthode.

Exemple 1.5.3 Reprenons toujours le même exemple du calcul de la racine, avec $f(x) = x^2 - 4$. Alors :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 4}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right) \tag{1.30}$$

Partant de l'estimation initiale $x_0 = 3$, on obtient successivement :

Itération (k)	Anc. valeur (x_k)	Nlle valeur (x_{k+1})	Erreur ($\|\varepsilon_{k+1}\|$)
0	3.000000	2.166667	0.166667
1	2.166667	2.006410	0.006410
2	2.006410	2.000010	0.000010
3	2.000010	2.000000	3.00000×10^{-11}

Table 1.6 – Résultats de l'exemple 1.5.3

Définition 1.5.1