UNIVERSITÉ : BATNA2
FACULTÉ DE: TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT : S.C.S.T.
Chargés de cours : Pr. M. Zidani et Pr. S. Derfouf.

Matière: Méthodes numériques
TD: Interpolation polynomiale

Année Universitaire : 2019/2020

Solution TD2 : Interpolation polynomiale

Exercice –1

La table des différences divisées des quatre points :

x	y (a_0)	a_1	a_2	a_3
2	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2/9}$
5	4	2	$1/3$	
3	0	0		
-1	0			

L'´equation de la droite passant par (2, 1) et (5, 4)prend la forme :

$$P_2(x) = \begin{cases} a_0 \\ +a_1(x-x_0) \\ +a_2(x-x_0)(x-x_1) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ +2\,(x-0) \\ +16(x-0)(x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 16\,x^2 - 14\,x}$$

L'équation de la parabole passant par (2, 1), (5, 4) et (3, 0) prend la forme :

$$P_3(x) = \begin{cases} & 0 \\ + & 2(x-0) \\ + & 16(x-0)(x-1) \\ + & 25\,(x-0)(x-1)(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 25\,x^3 - 59\,x^2 + 36\,x}$$

Le polynôme du troisième degré passant par les quatre points :

$$P_3(x) = \begin{cases} & 1 \\ + & 1(x-2) \\ + & 1(x-2)(x-5) \\ + & 2/9\,(x-2)(x-5)(x-3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_3(x) = 1/9\left(2x^3 - 11x^2 + 8x + 21\right)}$$

Exercice–2

L'´equation de la parabole passant par (0, 0), (1, 2)et (2, 36) :

$$P_2(x) = \begin{cases} y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ +y_1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ +y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ +2 \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \\ +36 \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 16\,x^2 - 14\,x}$$

L´équation du polynôme (de degré trois) passant par tous les points :

$$P_3(x) = \begin{cases} y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ +y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ +y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ +y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ +2 \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ +36 \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\ +252 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 25\,x^3 - 59\,x^2 + 36\,x}$$

Exercice –3

Puisque 3 < 3.2 < 3.5 on peut choisir de faire une interpolation linéaire entre les deux points d'abscissesx_0 = 3 et x_1 = 3.5 qui sont les plus proches pour minimiser l'erreur :

$$P_1(x) = y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) + y_1 \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$$

En remplaçant :

$$P_1(x) = 1.0986 \left(\frac{x - 3.5}{3 - 3.5}\right) + 1.2528 \left(\frac{x - 3}{3.5 - 3}\right)$$

Après simplification :

$$P_1(x) = 0.3084\,x + 0.1734 \Rightarrow \boxed{P_1(3.2) = 1.16028}$$

En utilisant deux points x_0 et x_1 on sait que :

$$\exists\, c \in [x_0, x_1] \ : \quad R_1(x) \ = \ \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

Ce qui donne la forme analytique de l'erreur :

$$\exists\, c \in [3, 3.5] \ : \quad R_1(x) \ = \ \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - 3)(x - 3.5)$$

Si on pose :

$$M = \sup_{x \in [3, 3.5]} \left| f^{(2)}(x) \right|$$

On déduit :

$$\boxed{|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}\, |(x - 3)(x - 3.5)|}$$

mais puisque $f''(x) = {-1}/{x^2}$ et $x \in [3, 3.5]$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x \in [3,3.5] \quad &\Rightarrow \quad 3 \leqslant x \leqslant 7/2 \\
&\Rightarrow \quad 1/9 \geqslant 1/x^2 \geqslant (2/7)^2 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{1/9 \geqslant |f''(x)|} \geqslant (2/7)^2 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{M = 1/9}
\end{aligned}
$$

Enfin :

$$\boxed{|R_1(x)| \leqslant \frac{1/9}{2}\, |(x-3)(x-3.5)|}$$

Pour x = 3.2 l'erreur est majorée comme suit :

$$|R_1(3.2)| \leqslant \frac{1/9}{2}\, |(3.2-3)(3.2-3.5)| = \frac{1}{3} \times 10^{-2}$$

ce qui donne $\ln 3.2 \simeq 1.16$ avec trois chiffres significatifs.

La droite d'interpolation entre $x_0 = 4$ et $x_1 = 4.5$:

$$P_1(x) = 1.3863 \left(\frac{x-4.5}{4-4.5}\right) + 1.5041 \left(\frac{x-4}{4.5-4}\right)$$

Après simplifications :

$$P_1(x) = 0.2356\,x + 0.4439 \Rightarrow \boxed{P_1(4.4) = 1.48054}$$

ce qui donne la forme analytique de l'erreur :

$$\exists\, c \in [4,4.5] \;:\quad R_1(x) \;=\; \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-4)(x-4.5)$$

on pose :

$$M = \sup_{x \in [4,4.5]} \left|f^{(2)}(x)\right|$$

on d´eduit :

$$\boxed{|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}\, |(x-4)(x-4.5)|}$$

pour la majoration, on obtient :

$$
\begin{aligned}
x \in [4,4.5] \quad &\Rightarrow \quad 4 \leqslant x \leqslant 9/2 \\
&\Rightarrow \quad 1/16 \geqslant 1/x^2 \geqslant (2/9)^2 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{1/16 \geqslant |f''(x)|} \geqslant (2/9)^2 \\
&\Rightarrow \quad \boxed{M = 1/16}
\end{aligned}
$$

Enfin :

$$\boxed{|R_1(x)| \leqslant \frac{1/16}{2}\, |(x-4)(x-4.5)|}$$

Pour x = 4.4 l'erreur est majorée comme suit :

$$|R_1(4.4)| \leqslant \frac{1/16}{2}\, |(4.4-4)(4.4-4.5)| = \frac{1}{8} \times 10^{-2}$$

donc ln 4.4 ≈ 1.48 avec trois chiffres significatifs.

Exercice –4

Puisque 3.5 < 3.6 < 4 on peut choisir de faire une interpolation linéaire entre les deux points d'abscisses $x_0 = 3.5$ et $x_1 = 4.0$ qui sont les plus proches pour minimiser l'erreur. La table des différences divisées de ces points :

x	y (a_0)	a_1
3.5	$\boxed{0.9086}$	$\boxed{0.1828}$
4.0	1.0000	

L'équation de la droite passant par ces points est alors :

$$P_1(x) = 0.9086 + 0.1828\,(x - 3.5)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(x) = 0.1828\ x + 0.2688}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(3.6) \simeq P_1(3.6) = 0.92688}$$

2 Pour la forme analytique de l'erreur :

$$\exists\ c \in [3.5, 4]\ :\quad R_1(x)\ =\ \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\,(x-3.5)(x-4)$$

Si on pose :

$$M = \sup_{x \in [3.5,4]} \left| f^{(2)}(x) \right|$$

Mais puisque :

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{18}\left(\frac{4}{3}\right)^{5/3} \Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{18}\left(\frac{4}{3}\right)^{5/3}}$$

On déduit :

$$\boxed{|R_1(x)| \leqslant \frac{\frac{1}{18}\left(\frac{4}{3}\right)^{5/3}}{2}\ |(x-3.5)(x-4)|}$$

Pour x = 3.6 :

$$|R_1(3.6)| \leqslant \frac{\frac{1}{18}\left(\frac{4}{3}\right)^{5/3}}{2}\ |(3.6-3.5)(3.6-4)| \simeq 0.18 \times 10^{-2}$$

ce qui donne f (3.6) ≈ 0.93 avec deux chiffres significatifs.

3. On peut aussi estimer l'erreur en utilisant la table des différences divisées précédente mais en ajoutant un troisième point :

x	y (a_0)	a_1	
3.5	$\boxed{0.9086}$	$\boxed{0.1828}$	$-0.0282 \simeq \dfrac{f''(x)}{2!}$
4.0	1.0000	0.1544	
4.5	1.0772		

Qui donne l'approximation :

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-3.5)(x-4) \simeq -0.0282\,(x-3.5)(x-4)$$

donc :

$$|R_1(3.6)| \simeq |-0.0282\,(3.6-3.5)(3.6-4)| \simeq 0.11 \times 10^{-2}$$

En accord avec le résultat précédent f (3.6) ≈0.93 .