Bio-Maths - TD n°1 : " Fonctions usuelles "

Exo I n°1 :

a : Dérivée première :

→ 1 $f(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x+7}\right)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \in \{-7\} : \frac{2x+3}{x+7} > 0\}$;

$=]-\infty, -7[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[$.

$\forall x \in D_f$: $f'(x) = \frac{2(x+7)-(2x+3)}{(x+7)^2} \cdot \frac{x+7}{2x+3}$

$$f'(x) = \frac{11}{(x+7)(2x+3)}.$$

→ 2 : $g(x) = e^{3x\ln x - x^2}$ // $D_g = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in D_g$: $g'(x) = (3\ln x + 3 - 2x)\, e^{3x\ln x - x^2}$

→ 3 : $h(x) = \text{Arcsin}\, 3x$ // $D_h = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$h'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; $\forall x \in]-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}[$.

→ 4 $I(x) = \cos^4(2x^2+5x)$ // $D_I = \mathbb{R}$

$I'(x) = (4x+5)\left(-\sin(2x^2+5x)\right)\left(4\cos^3(2x^2+5x)\right)$

$= -4(4x+5)\sin(2x^2+5x)\cos^3(2x^2+5x)$ // $\forall x \in \mathbb{R}$

→ 5 : $J(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ // $D_J = \mathbb{R}$

$J'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$

$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}$ // $x \in \mathbb{R}$

→ 6 $k(x) = \text{Arctan}(\sin x)$ // $D_k = \mathbb{R}$

$k'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ // $\forall x \in \mathbb{R}$.

→ 7 $L(x) = \log_3 \sqrt{3x^3+x^2+2}$

$D_L = \{x \in \mathbb{R} : 3x^3+2x^2+2 > 0\}$.

$L'(x) = \frac{9x^2+2x}{2\ln 3 \times \sqrt{3x^3+x^2+2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^3+x^2+2}}$

$= \frac{9x^2+2x}{\ln 9 \times (3x^3+x^2+2)}$ // $\forall x \in D_L$

b : Dérivation logarithmique :

$[\ln(f)]' = \frac{f'}{f} \Rightarrow f' = f[\ln f]'$

1 : $f(x) = x^3 e^{7x} \sin^8 x$

$[\ln f]'(x) = [\ln(x^3 e^{7x}\sin^8 x)]'$

$= [3\ln x + 7x + 8\ln(\sin x)]'$

$= [\frac{3}{x} + 7 + 8\,\text{cotan}\, x]$

2 : $g(x) = x^3 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{(1+x)^4}$

$[\ln g]'(x) = [3\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+\ln x) - 4\ln(1+x)]'$

$= \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\frac{1/x}{1+\ln(x)} - \frac{4}{1+x}$

3 : $h(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

$[\ln(h)]'(x) = [\ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)]'$

$= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$

Exercice n°2 :

→ Résolution d'eqs & d'inequations

1 : $4e^{2x} < 3e^x + 1 \Rightarrow 4e^{2x} - 3e^x - 1 < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 4X^2 - 3X - 1 < 0 \\ X = e^x \end{cases}$ // on pose $X = e^x$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$X_1 = \frac{3+5}{8} = 1$

$X_2 = \frac{3-5}{8} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} (4X+1)(X-1) < 0 \\ X = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X \in]-\frac{1}{4}, 1[\\ X = e^x \geq 0 \end{cases}$

$4(x+\frac{1}{4})(x-1)$

$(4x+1)(x-1)$

$\Rightarrow e^x < 1$

$\Rightarrow x < \ln 1 = 0$

donc ; la solution est :

$S =]-\infty, 0[= \mathbb{R}_-^*$

2 $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2$

$\ln(x-4)^2 = \ln\frac{x}{4}$

$\Rightarrow (x-4)^2 = \frac{x}{4}$

$\Rightarrow 4x^2 - 25x + 64 = 0$

$\Delta = 399$

$x_{1/2} = \frac{25 \pm i\sqrt{399}}{8}$

TD1 2021

3 : $9^x + 3^x - 12 = 0$

$(3^2)^x + 3^x - 12 = 0$

$(3^x)^2 + (3^x) - 12 = 0$

on pose : $X = 3^x$

on obtient :

$X^2 + X - 12 = 0$

$X_1 = -4$ (impossible)

$X_2 = 3$.

$X_2 = 3 \Rightarrow x = 1$.

4 : $4(\log_x y + \log_y x) = 17$; (1) ; $xy = 243$; $x > y > 1$

$(1) \Rightarrow \frac{\ln y}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{17}{4}$

on pose : $Z = \frac{\ln y}{\ln x}$

$\Rightarrow Z + \frac{1}{Z} = \frac{17}{4}$

$\Rightarrow 4(Z^2 + 1) = 17Z$

$\Rightarrow 4Z^2 - 17Z + 4 = 0$

$Z_1 = \frac{1}{4}$

$Z_2 = 4$

→ si $Z = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\ln(y)}{\ln x} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \ln y^4 = \ln x$

$\Rightarrow y^4 = x$

$\Rightarrow \left(\frac{243}{x}\right)^4 = x \Rightarrow x^5 = (243)^4$

$x > y > 1$

La cd est verifiée

$\Rightarrow x = \sqrt[5]{243^4} = 81$

$\Rightarrow y = \frac{243}{x} \Rightarrow y = \sqrt[5]{243} = 3$

→ si : $Z = 4 \Rightarrow \frac{\ln y}{\ln x} = 4$

$\Rightarrow \ln y = \ln x^4$

donc ;

$y = x^4 \Rightarrow xy = x^5$

$\Rightarrow 243 = x^5$

$\Rightarrow x = \sqrt[5]{243} = 3$

$\Rightarrow y = x^4 = 81$.

$y > x$ (impossible) ; La cd n'est pas verifiée.

Exo 3 : Fcts bijectives

→ **1** $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; $I =]-1, +\infty[$

$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

f : est continue et strictement croissante sur I

$\Rightarrow$ f est bijectives

→ **2** : $g(x) = (x-5)^2 + 4$; $I =]-\infty, 5]$

$g'(x) = 2(x-5) \leq 0$ si $x \in I$

f est continue et décroissante sur I

donc f est bijective sur I.

→ **3** : $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $I = \mathbb{R}$

$h'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$

h : est continue et croissante sur I

donc ; f est bijective sur I

Exo4

$f(t) = f_0(1 + e^{-2t} - e^{-6t})$; $f_0 = 0.8 g/L$.

1 $f(0) = f_0 = 0.8 (g/L)$ (initiale)

2 Variation de f :

$f'(t) = f_0(-2e^{-2t} + 6e^{-6t})$

$f'(t) \geq 0 \Rightarrow -2e^{-2t} + 6e^{-6t} \geq 0$

$\Rightarrow 3e^{-4t} \geq 1$

$\Rightarrow e^{-4t} \geq 1/3$

$\Rightarrow -4t \geq \ln(\frac{1}{3}) = -\ln 3$

$\Rightarrow t \leq \frac{\ln 3}{4}$

t	0		$\frac{\ln 3}{4} \simeq 0.27$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0.8	↗	1.1	↘	0.8

3. La valeur Maximale

$f_{max} = f\left(\frac{\ln 3}{4}\right) = 0.8\left(1 + e^{-2(\frac{\ln 3}{4})} - e^{-6(\frac{\ln 3}{4})}\right)$

$\simeq 1.1 (g/L)$

4 $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.8$