EXP : Nombres de lancers nécessaires pour avoir Face

$$X : \quad \Omega \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$PPP \dots PF \rightarrow X(PPP \dots PF)$$

$$\Omega = \{F, PF, PPF, \dots\}$$

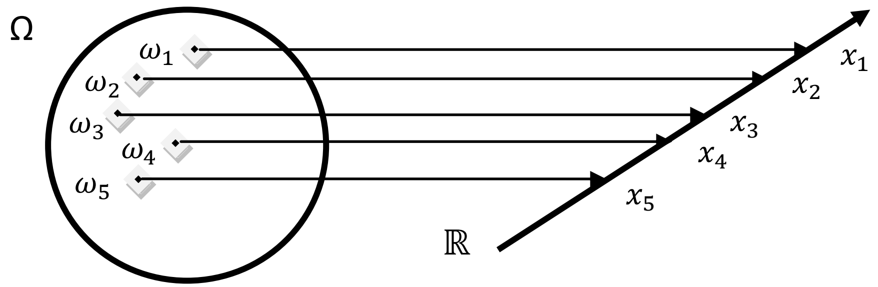
$$Avec\,;$$

$$X(\Omega) = \{1,2,3, \dots\} \in N^*$$

Corrigé type TD n° 10 : Variables Aléatoires « V. A. »

Variable Aléatoire :

Etant donné un univers **Ω**, une **V**ariable **A**léatoire (**V. A.)** est une application de **Ω** dans ℝ : $X\ :\ \omega \in \Omega\ \rightarrow\ X(\omega)\ \in \mathbb{R}$



Lorsque la variable X ne prend que des valeurs discrètes, on parle de **V**ariable **A**léatoire **D**iscrète.

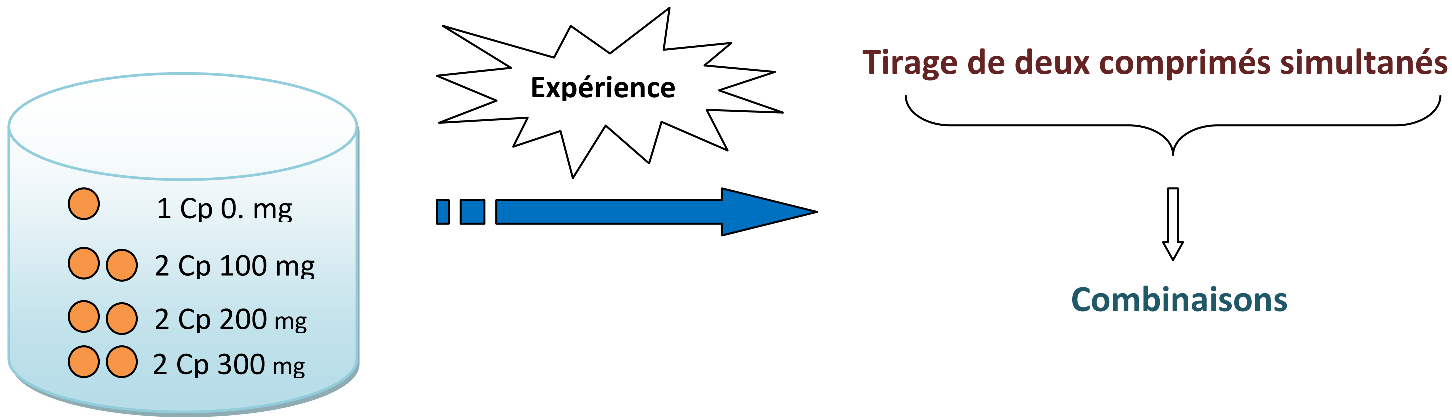
Exercice n° 1 : « V. A. D. »

Afin de mener une expérimentation de pharmacologie animale, on tire au hasard 2 comprimés dans un pot opaque qui contient 7 indiscernables au toucher. Parmi ces comprimés, 1 est sans principe actif (excipients seuls), 2 sont dosés à 100 mg de principe actif, 2 sont dosés à 200 mg et les 2 derniers à 300 mg.

Les 2 comprimés tirés sont administrés à un animal donné, et l'on considère la variable aléatoire X : dose ingérée par l'animal.

1. Calculer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance.
3. Calculer la fonction de répartition et tracer son graphe.

Solution :



V.A. : X : ″La dose ingérée par l'animal″

$X(\Omega) = \{100, 200, 300, 400, 500, 600\}$; $\qquad$ $Card(\Omega) = C_7^2 = \frac{7!}{7!2!} = 21$

1. **La loi de probabilité de X :**

- $P(X = 100) = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{2}{21}$ $\longrightarrow$ **« 1 comprimé de 0 mg et 1 comprimé de 100 mg » ;**
- $P(X = 200) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$ $\longrightarrow$ **« 1 Cp de 0 mg et 1 Cp de 200 mg <u>ou</u> 2 Cps de 100mg » ;**
- $P(X = 300) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{6}{21}$ $\longrightarrow$ **« 1 Cp de 0 mg et 1 Cp de 300 mg <u>ou</u> 1 Cps de 100 mg et 1 Cp de 200 » ;**
- $P(X = 400) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{5}{21}$ $\longrightarrow$ **« 1 Cp de 100 mg et 1 de 300 mg <u>ou</u> 2 Cps de 200mg » ;**
- $P(X = 500) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$ $\longrightarrow$ **« 1 Cp de 100 mg et 1 Cp de 300 mg <u>ou</u> 2 Cps de 200 mg » ;**
- $P(X = 600) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$ $\longrightarrow$ **« 2 Cps de 300 mg ».**

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	100	200	300	400	500	600	Σ
P_i	2/21	3/21	6/21	5/21	4/21	1/21	1

2. Calcul de l'Espérance E(X) et de la Variance V(X) :

a. E(X) :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i$$

$$= (100 \times \frac{2}{21} + 200 \times \frac{3}{21} + 300 \times \frac{61}{21} + 400 \times \frac{5}{21} + 500 \times \frac{4}{21} + 600 \times \frac{1}{21}) = \frac{7200}{21}$$

$$\boldsymbol{E(X) \cong 342.85\ mg}$$

b. V(X) :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_{i-} [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{21}(100^2 \times 2 + 200^2 \times 3 + 300^2 \times 6 + 400^2 \times 5 + 500^2 \times 8 + 600^2) - (342.85\ )^2$$

$$\boldsymbol{V(X) = 17711.171\ mg^2}$$

3. Calcul de la fonction de répartition F(X) :

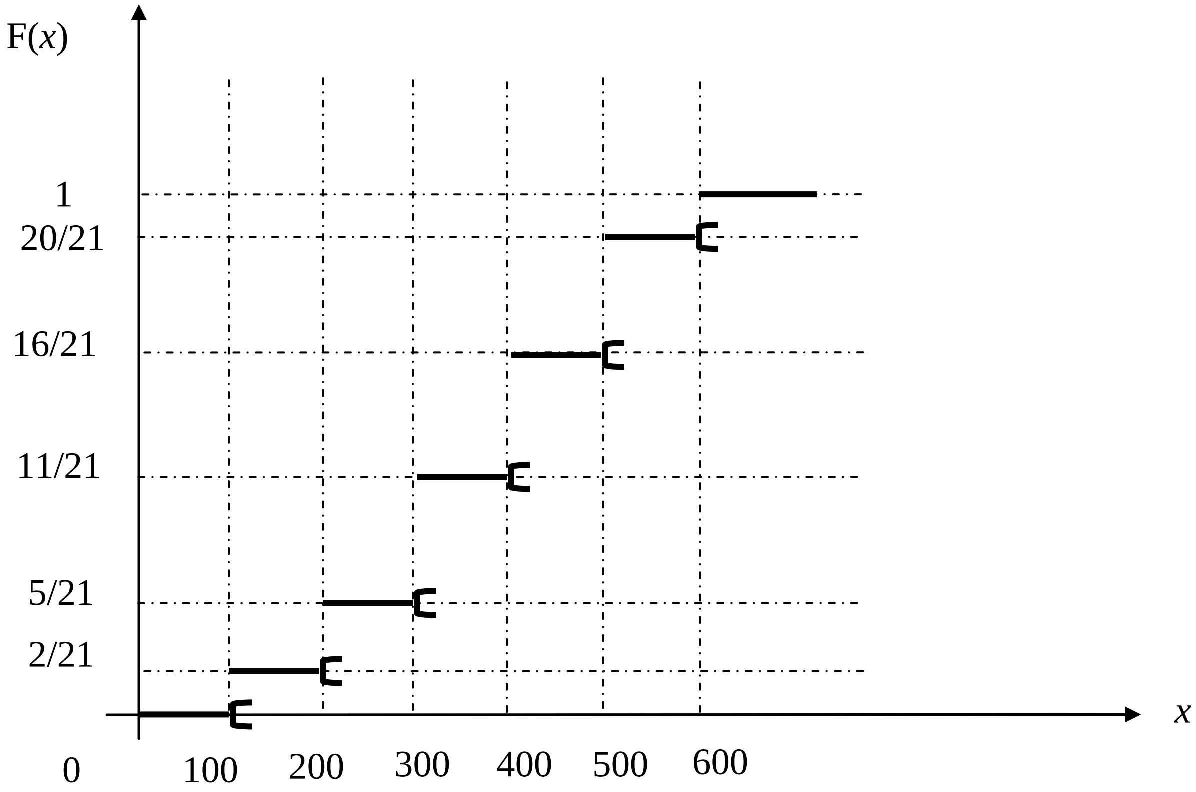
$$F_X : \quad \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$x \to F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq X} P(X = x_i)$$

Donc ; la fonction de répartition est définie comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 100 \\ \frac{2}{21} & si \quad 100 \leq x < 200 \\ \frac{5}{21} & si \quad 200 \leq x < 300 \\ \frac{11}{21} & si \quad 300 \leq x < 400 \\ \frac{16}{21} & si \quad 400 \leq x < 500 \\ \frac{20}{21} & si \quad 500 \leq x < 600 \\ \frac{21}{21} = 1 & si \quad x \geq 600 \end{cases}$$

Représentation graphique de F :



Exercice n° 4 : « V. A. R. »

Une variable aléatoire X admet pour densité de probabilité : $f(x) = \begin{cases} ax(2-x) & pour \quad x \in [0,2] \\ 0 & pour \quad x \notin [0,2] \end{cases}$

1. Calculer a.
2. Calculer la moyenne de X, son écart type.
3. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$.
4. Calculer $P(-1 < x < +1.5)$.

Solution :

X : V. A. à densité : $f(x) = \begin{cases} ax(2-x) & pour \quad x \in [0,2] \\ 0 & pour \quad x \notin [0,2] \end{cases}$

1. **Calcul de a**

Rappel ; $[f \ est \ une \ densité \ de \ probabilité] \Leftrightarrow \begin{cases} ① \quad f(x) \geq 0 \\ ② \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

① $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow ax(2-x) \geq 0$

$\Leftrightarrow a \geq 0 \quad [\ car; \ \ x(2-x) \geq 0; \ \ pour \ \ x \in [0,2]\ ]$

② $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 ax(2-x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \left[ax^2 - \frac{a}{3}x^3\right]_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow a\left[4 - \frac{8}{3}\right] = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{4}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a = 3/4}$$

2. **Calcul de l'espérance E(X) et de L'écart type σ(X) :**

a. **E(X) :**

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{4}x^2\,(2-x)dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$\boldsymbol{E(X) = 1}$$

b. σ(X) :

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx - [E(X)]^2$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 x^3\,(2-x)dx - 1$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 - 1$$

$$V(X) = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}) = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

3. Calcul de la fonction de répartition F(X) :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = P(X \leq x)$$

- **Si** $\boldsymbol{x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F(X) = 0}$
- **Si** $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}] \quad \Rightarrow \quad F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$\Rightarrow \quad F(X) = \frac{3}{4}\int_0^x t(2-t)dt$$

$$\Rightarrow \quad F(X) = \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{F(X) = \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]}$$

- **Si** $\boldsymbol{x} > 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F(X) = 1}$

Donc ; la fonction de répartition est : $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} < 0 \\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\left[\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\right] & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}] \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} > 2 \end{cases}$$

3. Calcul de $P(-1 < x < +1.5)$:

$$\boldsymbol{P}(-\mathbf{1} < x < +1.5) = \boldsymbol{F}(\mathbf{1.5}) - \boldsymbol{F}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{F}(\mathbf{1.5})$$

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\left[(\mathbf{1.5})^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1.5})^{\mathbf{3}}\right]$$

$$= \mathbf{0.84}$$

Exercice n° 3 :

On lance deux dés, on appelle Z la v. a. égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

Déterminer la loi de Z, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Réponse :

$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); \ldots; (6,4); (6,5); (6,6)\}$, $\quad Card(\Omega) = 36$

- Z est variable aléatoire définie par ;

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(i, j) \to |i - j|$$

Le support de Z est : $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

Avec ;

$[Z = 0] = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$[Z = 1] = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,5), (5,4), (4,3), (3,2), (2,1)\}$

$[Z = 2] = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (6,4), (5,3), (4,2), (3,1)\}$

$[Z = 3] = \{(1,4), (2,5), (3,6), (6,3), (5,2), (4,1)\}$

$[Z = 4] = \{(1,5), (2,6), (6,2), (5,1)\}$ et $[Z = 5] = \{(1,6), (6,1)\}$

On obtient alors ;

$$\boldsymbol{P\,([Z = 0]) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{P\,([Z = 1]) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}}$$

$$\boldsymbol{P\,([Z = 2]) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}}$$

$$\boldsymbol{P\,([Z = 3]) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{P\,([Z = 4]) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}}$$

$$\boldsymbol{P\,([Z = 5]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}}$$

La loi de probabilité est résumée dans le tableau suivant :

z_k	0	1	2	3	4	5	Σ
P_k	**6/36**	**10/36**	**8/36**	**6/36**	**4/36**	**2/36**	**1**

- **La fonction de répartition :**

$$F(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z < 0 \\ \frac{6}{36} & si \quad 0 \leq z < 1 \\ \frac{16}{36} & si \quad 1 \leq z < 2 \\ \frac{24}{36} & si \quad 2 \leq z < 3 \\ \frac{30}{36} & si \quad 3 \leq z < 4 \\ \frac{32}{36} & si \quad 4 \leq z < 5 \\ \frac{36}{36} = 1 & si \quad z \geq 5 \end{cases}$$

- **Valeurs caractéristiques :**

Espérance : $E(Z) = \sum_{k=1}^{6} z_k p_k = \frac{70}{36} \cong 1.94$

Variance : $V(Z) = \sum_{k=1}^{6} z_k^2 p_k - [E(Z)]^2 = \frac{210}{36} - \left(\frac{70}{36}\right)^2 \cong 3.67$

علمتني الرياضيات :

أن السالب بعد السالب يعني موجب فلا تيأس فالمصيبة بعد المصيبة تعني الفرج

Bon courage