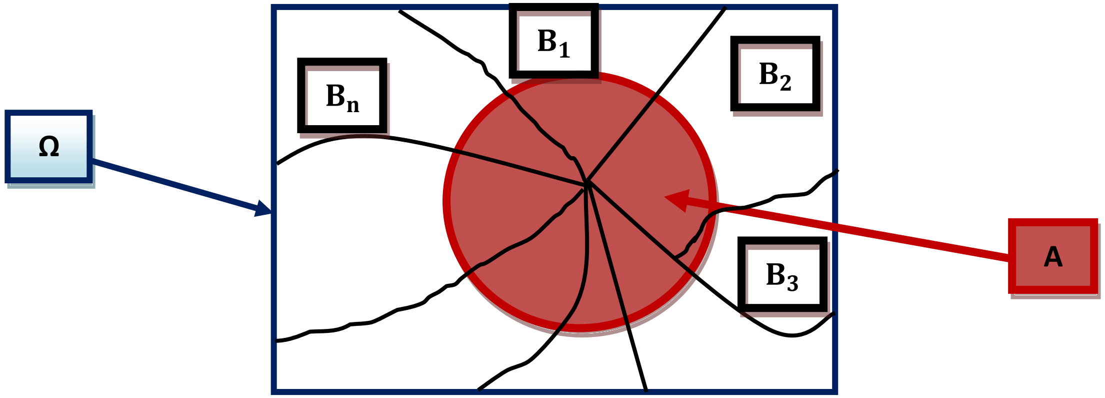
Rappel :

Formule des probabilités totales :

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ un système complet d'évènement de Ω ; pour tout évènement de A de Ω, on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P((A|B_i)$$



Formule de Bayes :

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ un système complet d'évènement de Ω ; pour tout évènement de A de Ω et tout $j = \overline{1, n}$, on a :

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \times P((A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P((A|B_i)}$$

Corrigé type TD n° 9 : Calcul des Probabilités

Exercice 6

Dans une population, les individus sont réparties en quatre groupes sanguins : A, B, AB, O. A L'intérieur de chaque groupe sanguin, il y a deux rhésus (rhésus + ou rhésus-).

On a relevé les pourcentages de la population dans le tableau suivant :

groupe	A	B	AB	O
Rhésus + (R^+)	32,8	8,1	4,15	36
Rhésus - (R^-)	7,2	1,9	0,85	9

Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

1. qu'il soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus -.
2. qu'il ait un rhésus – sachant qu'il est du groupe O.
3. qu'il soit du groupe AB sachant qu'il est du rhésus +.

Solution :

1. La probabilité qu'un individu soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus -

$$P(O|R^-) = \frac{P(O \cap R^-)}{P(R^-)} = \frac{9}{18.95} = 0.4749$$

avec ; $P(R^-) = 0.072 + 0.019 + 0.0085 + 0.09 = 0.001895 \rightarrow 18.95\ \%$

2. La probabilité qu'un individu ait un rhésus – sachant qu'il est du groupe O

$$P(R^-|O) = \frac{P(R^- \cap O)}{P(O)} = \frac{9}{145} = \frac{1}{5} = 0.2$$

avec ; $P(O) = 0.36 + 0.09 = 0.45 \rightarrow 45\ \%$

3. La probabilité qu'un individu soit du groupe AB sachant qu'il est du rhésus +

$$P(AB|R^+) = \frac{P(AB \cap R^+)}{P(R^+)} = \frac{4.15}{81.05} = 0.0512$$

avec ; $P(R^+) = 0.32 + 0.081 + 0.0415 + 0.36 = 0.8105 \rightarrow 81.05\ \%$

Exercice 07

Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa **sensibilité** α « la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade » et sa **spécificité** β « la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain ». Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur 1000 personnes.

1. Calculer la probabilité pour que vous soyer un sujet sain alors que votre test est positif ;

   On donne $\alpha = 98\ \%$ et $\beta = 97\ \%$

2. Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif ; Commentez vos réponses.

Solution :

$$\text{Sensibilité } \alpha : P(T|M) = 0.98$$

$$\text{Sensibilité } \beta : P(\bar{T}|\bar{M}) = 0.97$$

$$P(M) = \frac{1}{1000} = 0.001$$

1. $$P(\bar{M}|T) = \frac{\mathrm{P(T|\bar{M})P(\bar{M})}}{\mathrm{P(M)P(T|M)+P(\bar{M})P(T|\bar{M})}} = \frac{0.03\times 0.999}{0.98\times 0.001+0.03\times 0.999}$$

Sachant que : $P(T|\bar{M}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{M}) = 1 - \beta = 0.03$; $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 0.999$; $\Rightarrow$ $P(\bar{M}|T) = 0.968$

2. $P(M|\bar{T}) = \frac{\mathrm{P}(\bar{\mathrm{T}}|\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})}{\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}(\bar{\mathrm{T}}|\mathrm{M})+\mathrm{P}(\bar{\mathrm{M}})\mathrm{P}(\bar{\mathrm{T}}|\bar{\mathrm{M}})} = \frac{0.02\times0.001}{0.02\times0.001+0.97\times0.999}$

Sachant que : $P(\bar{T}|M) = 1 - P(T|M) = 1 - \alpha = 0.02$; $P(M) = 0.999$; $\Rightarrow$ $P(M|\bar{T}) = 2.06 \times 10^{-5}$

Commentaire :

On estime que le test est efficace si : $P(M|T) > 0.95$

et comme $P(M|T) = 1 - P(\bar{M}|T) = 1 - 0.96 = 0.04$

$\Rightarrow$ Ce test est très faible (le test n'est pas efficace).

Exercice n° 8 :

On interroge les parents d'une famille pour connaitre le rhésus sanguin de leur enfants : positif où négatif. On considère les évènements suivants :

A : « les enfants n'ont pas tous le même rhésus »

B : « au plus, un enfants est de rhésus négatif »

3. Les parents ont deux enfants, les événements A et B sont ils indépendants ?
4. Les parents ont trois enfants, les événements A et B sont ils indépendants ?

Solution :

1. Les parents ont deux enfants ; $\rightarrow$ $\Omega = \{R^+R^+, R^+R^-, R^-R^+, R^-R^-\}$;

$$A = \{R^+R^-, R^-R^+\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{R^+R^+, R^+R^-, R^-R^+\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

On a ;

$$\left.\begin{array}{c} A \subset B = A \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} \\ \text{et} \\ P(A)P(B) = \dfrac{3}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

donc ; A et B sont dépendants.

2. Les parents ont trois enfants ; $\rightarrow$ $\Omega = \{R^+R^+R^+, R^+R^+R^-, R^+R^-R^+, R^-R^+R^+, R^-R^+R^-, R^-R^-R^+, R^+R^-R^-, R^-R^-R^-\}$

$$A = \{R^+R^+R^-, R^+R^-R^+, R^-R^+R^+, R^-R^+R^-, R^-R^-R^+, R^+R^-R^-\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{R^+R^+R^+, R^+R^+R^-, R^+R^-R^+, R^-R^+R^+\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{R^+R^+R^-, R^+R^-R^+, R^-R^+R^+\}$$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A)P(B)$; donc ; A et B sont indépendants.

Bon courage